

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики



Е.В. Хорошилова

КУРС СЕМИНАРОВ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Самоучитель

Книга 2

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ:
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.
НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие
для очной, дистанционной и смешанной форм обучения
студентов университетов

Москва—2022

УДК 378.4:517.1:517.2:517.5
ББК 22.16
X82

Рецензенты:

проф. А.В. Гасников (МФТИ, Долгопрудный), проф. Л.Ф. Петров (РЭА им. Г.В. Плеханова, Москва), проф. А.Д. Мижидон (Восточно-Сибирский ГУТиУ, Улан-Удэ), проф. В.А. Срочко (Иркутский ГУ), проф. А.М. Савчук (ФКИ МГУ им. М.В. Ломоносова)

Хорошилова Е.В.

X 82 Курс семинаров по математическому анализу: Самоучитель. – В 4-х кн. – Кн. 2: Функции одной действительной переменной: Дифференциальное исчисление. Неопределённый интеграл. – Учеб. пособие для очной и дистанционной форм обучения студентов университетов. – М.: Издательство МГУ, 2022. – 368 с.

Вторая книга нового пособия–задачника из 4-х книг (всего более 3400 задач с решениями) включает более 800 задач и посвящена отработке навыков основных видов исследований по теме «Функции одной действительной переменной»: дифференциальное исчисление и неопределённый интеграл.

В книге приводятся необходимые теоретические сведения, основной акцент делается на систематизации приёмов и методов решения задач. Изложение методов сопровождается разбором примеров и задачами для самостоятельного решения.

Для студентов младших курсов университетов, обучающихся математическим и инженерно–технологическим специальностям, и молодых преподавателей.

УДК 378.4:517.1:517.2:517.5
ББК 22.16
© Хорошилова Е.В., 2022

Содержание

Предисловие	7
1 СЕМИНАР: Техника дифференцирования функций одной переменной	10
1.1 Понятие производной. Таблица производных	10
1.2 Дифференцирование суммы, произведения, частного, сложной и обратной функций	12
1.3 Производная показательной-степенной функции	15
1.4 Производная произведения трёх и более функций	16
1.5 Другие приёмы дифференцирования функций	17
1.6 Задачи для самостоятельного решения	19
1.7 Ответы и решения	23
2 СЕМИНАР: Дифференцируемость: производная и дифференциал	31
2.1 Понятие производной явно заданной функции	31
2.2 Понятие дифференциала функции. Дифференцируемость в точке и на множестве. Связь между дифференциалом и производной	33
2.3 Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная и нормаль. Приближение функции в окрестности точки дифференциалом	35
2.4 Связь дифференцируемости и непрерывности	38
2.5 Односторонние производные. Необходимое и достаточное условие существования производной в точке	40
2.6 Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций	44
2.7 Производная и дифференциал сложной функции. Почленное дифференцирование равенств	44
2.8 О характере точек разрыва производной. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной. О производных периодической и чётной функций	45
2.9 Задачи для самостоятельного решения	47
2.10 Ответы и решения	53
3 СЕМИНАР: Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Производная обратной функции	67
3.1 Производная параметрически заданной функции	67
3.2 Производная и дифференциал неявно заданной функции	70
3.3 Производная обратной функции	73
3.4 Задачи для самостоятельного решения	74

3.5	Ответы и решения	77
4	СЕМИНАР: Производные и дифференциалы высших порядков	84
4.1	Производные высших порядков функций, заданных явно	84
4.2	Дифференциалы высших порядков функций, заданных явно	87
4.3	Производные и дифференциалы высших порядков от суммы и произведения функций. Формула Лейбница.	88
4.4	Производные высших порядков функций, заданных параметрически	89
4.5	Производные и дифференциалы высших порядков функций, заданных неявно	90
4.6	Производные высших порядков обратных функций	93
4.7	Производные высших порядков сложных функций	93
4.8	Задачи для самостоятельного решения	95
4.9	Ответы и решения	97
5	СЕМИНАР: Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши	106
5.1	Теорема Ферма́, или Необходимое условие локального экстремума	106
5.2	Теорема Ро́лля, или Теорема о нуле производной	107
5.3	Теорема Лагранжа, или Формула конечных приращений	108
5.4	Теорема Коши́, или Обобщённая формула конечных приращений	110
5.5	Задачи для самостоятельного решения	111
5.6	Ответы и решения	115
6	СЕМИНАР: Раскрытие неопределённостей. Правила Лопиталья	125
6.1	Первое правило Лопиталья: раскрытие неопределённостей вида $\frac{0}{0}$	125
6.2	Второе правило Лопиталья: раскрытие неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$	127
6.3	Другие виды неопределённостей: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 и способы их раскрытия	129
6.4	Задачи для самостоятельного решения	132
6.5	Ответы и решения	135
7	СЕМИНАР: Формула Тейлора	144
7.1	Понятие многочлена Тейлора, остаточного члена	144
7.2	Локальная формула Тейлора. Формы остаточного члена	145
7.3	Ряд Тейлора (Маклорена). Разложение функций в степенные ряды	146
7.4	Таблица разложений элементарных функций в степенные ряды .	149
7.5	Таблица разложений элементарных функций по формуле Маклорена. Формула Тейлора на промежутке	151

7.6	Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений. Оценки погрешностей	157
7.7	Задачи для самостоятельного решения	159
7.8	Ответы и решения	165
8	СЕМИНАР: Неопределённый интеграл и методы его вычисления	190
8.1	Первообразная и неопределённый интеграл	190
8.2	Основные свойства неопределённого интеграла. Таблица простейших интегралов	196
8.3	Основные методы интегрирования	199
8.3.1	Интегрирование путём сведения к табличным интегралам	199
8.3.2	Интегрирование путем замены переменной	200
8.3.3	Интегрирование по частям	204
8.4	Задачи для самостоятельного решения	207
8.5	Ответы и решения	211
9	СЕМИНАР: Интегрирование рациональных функций	230
9.1	Простейшие классы интегралов	230
9.2	Представление рациональной дроби в виде суммы простейших дробей с использованием метода неопределённых коэффициентов	237
9.3	Метод М. В. Остроградского	240
9.4	Задачи для самостоятельного решения	244
9.5	Ответы и решения	246
10	СЕМИНАР: Интегрирование иррациональностей	259
10.1	Интегрирование линейных и дробно-линейных иррациональностей	259
10.2	Интегрирование квадратичных иррациональностей	261
10.2.1	Важные частные случаи квадратичных иррациональностей	261
10.2.2	Рационализирующие подстановки Эйлера	275
10.3	Интегрирование биномиальных дифференциалов	278
10.4	Умножение на сопряжённое выражение, нестандартные подстановки и другие преобразования	280
10.5	Задачи для самостоятельного решения	283
10.6	Ответы и решения	287
11	СЕМИНАР: Интегрирование тригонометрических, логарифмических, показательных, гиперболических и других трансцендентных функций	305
11.1	Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x) dx$	305
11.2	Интегралы вида $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$	309

11.3	Интегралы вида $\int \sin(ax) \cos(bx) dx$, $\int \sin(ax) \sin(bx) dx$, $\int \cos(ax) \cos(bx) dx$, а также $\int \sin(ax) \sin(bx) \sin(cx) dx$ и др.	315
11.4	Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$)	316
11.5	Интегралы вида $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$	316
11.6	Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)}$, $\int \frac{dx}{\cos(x+a) \cdot \cos(x+b)}$	318
11.7	Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$, $\int \frac{dx}{\cos x - \cos a}$	319
11.8	Интегралы вида $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$	319
11.9	Интегралы, берущиеся по частям	320
11.10	Интегрирование гиперболических, показательных, логарифми- ческих и обратных тригонометрических выражений	321
11.11	Задачи для самостоятельного решения	325
11.12	Ответы и решения	330
12	Варианты заданий для самопроверки, подготовки к контроль- ным работам и зачёту	353
12.1	ВАРИАНТ № 1	354
12.2	ВАРИАНТ № 2	355
12.3	ВАРИАНТ № 3	356
12.4	ВАРИАНТ № 4	357
12.5	ВАРИАНТ № 5	358
12.6	ВАРИАНТ № 6	359
12.7	ВАРИАНТ № 7	360
12.8	ВАРИАНТ № 8	361
12.9	ВАРИАНТ № 9	362
12.10	ВАРИАНТ № 10	363
	Предметный указатель	364
	Список литературы	366

Предисловие

«Математика полезна тем, что она трудна».

А.Д. Александров (1912–1998) — советский и российский математик, физик, философ, альпинист. Организатор образования и науки в системе высшей школы. Ректор Ленинградского государственного университета. Академик АН СССР и РАН.

Представленное вашему вниманию учебное пособие является второй из четырёх книг, образующих углублённый курс практических занятий по математическому анализу для студентов–математиков. Курс охватывает практически весь первый год обучения. Данное пособие – это, в первую очередь, задачник, в котором в начале каждой темы (семинара) приводятся краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач (доказательство большинства из этих теорем даётся на лекциях). Цель пособия – ознакомление студентов с разнообразием задач математического анализа и различными приёмами и методами практического решения этих задач. Важно дать студентам необходимую базу для изучения анализа на практике, научить их самостоятельности в решении задач. По этой причине в конце каждого семинара автор счёл необходимым привести один или даже несколько способов решения всех задач.

Для чего даны решения? Если студент пришёл в университет с недостаточной базой, то на младших курсах он сталкивается с трудностью в нахождении метода решения многих задач, так как у него мало опыта или он большей частью не был выработан в средней школе. Таким студентам на начальном этапе крайне полезно изучать способы решения, и разобранные решения задач являются активным подспорьем этому. Более продвинутые студенты (например, окончившие физико-математические школы и имеющие дополнительные знания и навыки ещё со школьных времён) должны пытаться решать задачи самостоятельно, но иметь возможность сверить ответ или посмотреть, какие другие способы имеются для решения той или иной задачи. То есть задачки с решениями полезны и для такой категории студентов. Каждый студент, как бы он ни учился, всегда может извлечь для себя максимальную пользу, имея под рукой возможность узнать дополнительно другие, отличные от своего, способы решения и тем самым контролировать уровень своих знаний.

Книга 2 посвящена отработке практических навыков основных видов исследований по одной из важнейших тем начального этапа изучения математического анализа в вузах – разделу «Функции одной действительной переменной». Данный раздел традиционно изучается студентами в 1-м семестре 1-го курса университетов. В этот раздел входит знакомство с такими основополагающими понятиями как дифференцируемость функций, включая производные и дифференциалы высших порядков, нахождение производных у функций,

заданных параметрически и неявно, обратных функций; изучение различных приёмов для раскрытия неопределённостей; ознакомление с практикой использования основных теорем дифференциального исчисления (Ролля, Лагранжа, Ферма, Коши и др.), аппроксимация дифференцируемых функций многочленами Тейлора, а также формирование устойчивых навыков вычисления различных классов неопределённых интегралов существующими методами и приёмами.

В основу пособия положен курс семинарских занятий для первокурсников, проводимых автором в течение многих лет на факультете ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. Для успешного усвоения материала всегда рекомендуется предварительно прослушивать лекции по изучаемой теме. Каждый семинар начинается с основных определений, свойств и теорем курса. Акцент делается на разборе основных приёмов и методов решения задач и примерах их использования. В конце каждого семинара приводится подборка задач по теме семинара для самостоятельного решения. Задачи, большей частью, подбирались из разных источников (см. список использованной литературы) или составлялись автором. Следует чётко осознавать, что только решение достаточного количества разнообразных задач позволяет студенту практически усвоить учебный материал, добиваясь необходимой степени понимания и творческого подхода к решению стоящих перед ним задач.

В книге 2 пособия приводятся более 800 задач и примеров с подробными решениями, что позволяет использовать его не только в качестве задачника в течение семестра, но и как *справочное пособие* при самостоятельном изучении данного раздела математики, а также при подготовке к контрольным и зачётным работам и экзамену. Особенно возрастает роль такого рода *самоучителей* при дистанционном и смешанном обучении.

Вместе с тем, всегда найдутся любознательные студенты, которым разобранных в книге задач будет недостаточно. В этом случае рекомендую обращаться к проверенным временем классическим учебникам по курсу математического анализа (например, трудам Г. М. Фихтенгольца,¹ Л. Б. Кудрявцева²

¹Григорий Михайлович *Фихтенгольц* (1888–1959) — русский и советский математик, с 1918 — профессор Петроградского (затем Ленинградского) университета, в котором проработал более сорока лет. Почти все ленинградские математики были в определённой степени его учениками. В разное время его лекции слушали С. Л. Соболев, Л. В. Канторович, И. П. Натансон, С. А. Христианович, С. Г. Михлин, Д. К. Фаддеев, и многие другие видные советские математики. Наиболее известен как автор трёхтомника «Курс дифференциального и интегрального исчисления».

²Лев Дмитриевич *Кудрявцев* (1923–2012) — математик, член-корреспондент АН СССР. Специалист в области теорий функций, уравнений с частными производными и топологии.

и С. М. Никольского,¹ В. А. Ильина,² Э. Г. Позняка,³ В. А. Садовниченко,⁴ Бл. Х. Сендова,⁵ В. А. Зорича⁶), задачникам Б. П. Демидовича,⁷ Г. Н. Бермана⁸ и многим другим отечественным и зарубежным учебникам и задачникам, разработанным преподавателями вузов для студентов, а также проверенным интернет-источникам, научным трудам известных математиков по данной теме и, конечно, лекциям, читаемым для студентов на факультете. Автор выражает искреннюю признательность составителям тех задач, которые использованы в этом учебном пособии и, тем самым, дали ему появиться.

Желаю успеха в изучении данных разделов!

Е.В. Хорошилова, сентябрь 2022 г.

¹Сергей Михайлович *Никольский* (1905–2012) — советский и российский математик, академик РАН (1991); академик АН СССР (1972). Был главным научным сотрудником МИАНа, профессором МФТИ и мехмата МГУ. В 2005 году в Москве состоялась конференция, посвящённая 100-летию С. М. Никольского, в которой он принял участие.

²Владимир Александрович *Ильин* (1928–2014) — советский и российский математик, профессор МГУ, академик РАН. Внёс заметный вклад в теорию дифференциальных уравнений, спектральную теорию дифференциальных операторов и математическое моделирование. Ученик А. Н. Тихонова. Работал на кафедре общей математики факультета ВМК МГУ: профессор (1970–1974), заведующий (1974–2014). Автор более 300 научных работ и соавтор учебников по математическому анализу, аналитической геометрии и линейной алгебре.

³Эдуард Генрихович *Позняк* (1923–1993) — математик, профессор кафедры математики физического факультета МГУ, заслуженный деятель науки РСФСР. В 1980 году совместно с В. А. Ильиным стал лауреатом Государственной премии СССР за учебники «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра» и «Основы математического анализа».

⁴Виктор Антонович *Садовнический* (1939) — советский и российский математик. Ректор МГУ им. М. В. Ломоносова (1992). Президент Российского Союза ректоров (1994), председатель Российского совета олимпиад школьников. Академик РАН (1997), вице-президент РАН (2008–2013). Лауреат Государственной премии СССР (1989), Государственной премии Российской Федерации (2002) и трёх премий Правительства Российской Федерации (2006, 2011, 2012). Почётный гражданин Москвы (2008). Полный кавалер ордена «За заслуги перед Отечеством».

⁵Благовест Христов *Сендов* (1932–2020) — болгарский математик и политический деятель. Работы по теории приближений, вычислительной геометрии. Автор более двухсот научных работ, 7 монографий и 30 учебников, в том числе соавтор учебника В. А. Ильин, В. А. Садовнический, Бл. Х. Сендов «Математический анализ». С 1981 — академик, с 1988 по 1991 был председателем Болгарской академии наук.

⁶Владимир Антонович *Зорич* (род. 1937) — советский и российский математик, доктор физико-математических наук (1969), профессор (1971). Заслуженный профессор МГУ (2007). Автор широко известного учебника «Математический анализ»

⁷Борис Павлович *Демидович* (1906–1977) — советский математик и педагог, специалист в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа, математической физики (ученик А. Н. Колмогорова). Автор одного из наиболее известных в математической среде бывшего СССР сборников задач по математическому анализу.

⁸Георгий Николаевич *Берман* (1908–1949) — советский математик, автор учебников, учебных пособий и научно-популярных книг, которые в период с 1938 по 2015 год изданы общим тиражом свыше 6 миллионов экземпляров.

1 СЕМИНАР: Техника дифференцирования функций одной переменной

*«Математику уже затем учить надобно,
что она ум в порядок приводит».*

*М.В. Ломоносов (1711–1765), учёный–энциклопедист,
основатель Московского университета.*

Содержание данного занятия относится к *дифференциальному исчислению* функций одной действительной переменной, которое является важнейшей частью *математического анализа*.¹ В дифференциальном исчислении изучаются понятия производной и дифференциала, а также способы их применения к исследованию функций. Займёмся вначале отработкой практических навыков вычисления производных элементарных² функций, в том числе сложных и обратных функций, для чего изучим существующие приёмы дифференцирования. Ближайшая цель – научиться дифференцировать функции одной действительной переменной, поскольку это умение может понадобиться нам раньше других.

Напомним кратко определение, основные свойства производных и приёмы их вычисления, делая акцент на последних. На следующих семинарах мы продолжим тему производной (дифференцируемости) на более углублённом математическом уровне.

1.1 Понятие производной. Таблица производных

Пусть функция $y = y(x)$ определена на интервале (a, b) и x_0 – точка из этого интервала. Дадим аргументу x в точке x_0 приращение Δx (действительное число, положительное или отрицательное, обычно считается достаточно малым, так чтобы точка $x = x_0 + \Delta x$ не вышла за пределы интервала (a, b)).

¹*Математический анализ* – совокупность разделов математики, посвящённых исследованию функций и их обобщений методами дифференциального и интегрального исчислений. К анализу относят разделы: дифференциальное и интегральное исчисление, теорию рядов и многомерных интегралов, векторный анализ, а также функциональный анализ вместе с теорией интеграла Лебега, комплексный анализ (ТФКП), нестандартный анализ, изучающий бесконечно малые и бесконечно большие числа, а также вариационное исчисление.

²Класс функций, состоящий из многочленов, рациональных функций, показательных функций, логарифмических функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций, гиперболических и обратных к ним функций, а также функций, получающихся из перечисленных выше с помощью четырёх основных арифметических действий и суперпозиций (образование сложной функции), применённых конечное число раз. Производная от Э. ф. также является Э. ф.

Тогда функция получит приращение $\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$. Составим отношение приращения функции к приращению аргумента $\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$ и устремим Δx к нулю. Если существует конечный предел этого отношения

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

(не зависящий от способа стремления Δx к нулю), то это число называют *производной* функции $y(x)$ в точке $x = x_0$ и обозначают $y'(x_0)$ или $\frac{dy(x_0)}{dx}$. Эквивалентная форма определения производной получится, если обозначить $x = x_0 + \Delta x$:

$$y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}.$$

В средней школе, пока понятие дифференциала не определено, функция называется *дифференцируемой в точке* x_0 , если она имеет в этой точке конечную производную. В противном случае, когда производная в точке не существует или бесконечна, функция считается *недифференцируемой*.

Если функция $y(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b) , то на этом интервале определена функция $y = y'(x)$. Если в задаче требуется найти производную некоторой функции, то по умолчанию производная вычисляется при тех значениях x , при которых она существует, и полагается указывать область существования производной.

Заметим, что для существования производной необходимо, чтобы функция была определена всюду в некоторой (может быть, достаточно малой) двусторонней окрестности точки x_0 .

Пример 1. Функция $y = \sqrt{-x^2}$ определена в единственной точке $x_0 = 0$, но не дифференцируема в этой точке, поскольку не определена в её окрестности. $\square$

Пример 2. Функция $y = \arcsin x$, определённая на сегменте $[-1, 1]$, дифференцируема лишь внутри этого отрезка, т. е. на интервале $(-1, 1)$. В граничных точках $x = -1$ и $x = 1$ производная не существует, так как функция определена, соответственно, лишь в правой или левой полуокрестностях этих точек. В этих точках речь может идти только о существовании так называемых односторонних производных, с которыми мы познакомимся позже. $\square$

Таблица производных элементарных функций.

Обратимся к таблице производных основных элементарных функций.

1. Степенная функция: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
2. Показательная функция: $(a^x)' = a^x \ln a$ ($0 < a \neq 1$), в частности, $(e^x)' = e^x$.

3. Логарифмическая функция: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($0 < a \neq 1, x > 0$), в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Тригонометрические функции:

4. $(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R};$

5. $(\cos x)' = -\sin x, x \in \mathbb{R};$

6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\cos x \neq 0);$

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (\sin x \neq 0).$

Обратные тригонометрические функции:

8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1);$

9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1);$

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R};$

11. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$

Гиперболические функции:

12. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, x \in \mathbb{R};$

13. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, x \in \mathbb{R};$

14. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, x \in \mathbb{R};$

15. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$

1.2 Дифференцирование суммы, произведения, частного, сложной и обратной функций

«Математика — это то, чем занимаются Гаусс, Чебышёв, Ляпунов, Стеклов и я». — В ответ на вопрос, что такое математика.

А. А. Марков (1856–1922), русский математик, академик, внёсший большой вклад в теорию вероятностей, математический анализ и теорию чисел. Основной предмет его исследований позже стал известен как марковские цепи, или марковские процессы.

Доказательство следующих свойств (теорем) проводится на лекциях.

1. Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют производные в точке x , то их сумма, разность, произведение и частное также имеют в точке x производные, причём

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

В частности, при дифференцировании произведения функции $u(x)$ на константу $C \neq 0$ постоянную величину можно выносить из-под знака производной:

$$(Cu(x))' = Cu'(x).$$

Пример 3. Найти производные функций, указав их области определения:

$$\text{а) } y = 5\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x} + 7; \quad \text{б) } y = x \operatorname{sh} x; \quad \text{в) } y = \frac{\ln x - 1}{\cos x}.$$

$$\text{Решение. а) } y' = 5 \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 2(x^{-1})' + 7' = 5 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + 2(-x^{-2}) = \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^2}, \quad x \neq 0;$$

$$\text{б) } y' = (x)' \cdot \operatorname{sh} x + x \cdot (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\begin{aligned} \text{в) } y' &= \frac{(\ln x - 1)' \cos x - (\ln x - 1)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\frac{\cos x}{x} + (\ln x - 1) \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x + x(\ln x - 1) \sin x}{x \cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \square \end{aligned}$$

2. *Производная сложной функции:* если функция $u = u(x)$ имеет производную u' в точке x , а функция $h = h(u)$ имеет производную h' в соответствующей точке u , то сложная¹ функция $h(u(x))$ имеет производную в точке x , причём

$$(h(u(x)))'_x = h'_u(u) \cdot u'_x(x), \text{ или просто } (h(u(x)))' = h'(u) \cdot u'(x).$$

Пример 4. Найти производные сложных функций:

$$\text{а) } y = \arcsin(\sin^2 x); \quad \text{б) } y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x).$$

Решение. Имеем

$$\text{а) } y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sqrt{(1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x)}} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{|\cos x| \sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

Используя функцию «сигнум» (знак числа)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

и тождество $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$, приведём ответ к виду:

$$y' = \frac{2 \sin x \cdot \operatorname{sgn}(\cos x)}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, \quad \cos x \neq 0.$$

¹Сложную функцию, или композицию функций u и h , также обозначают $(h \circ u)(x)$.

$$\text{б) } y' = \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Пример 5. Найти производные сложных функций (ответ можно не упрощать):

$$\text{а) } y = \lg(\lg(\lg x)); \quad \text{б) } y = \operatorname{tg} \left(\sin \sqrt{x^5 + x} \right).$$

Решение. Имеем

$$\text{а) } y' = \frac{1}{\lg(\lg x) \cdot \ln 10} \cdot \frac{1}{\lg x \cdot \ln 10} \cdot \frac{1}{x \ln 10}, \quad x > 10.$$

$$\text{б) } y' = \frac{1}{\cos^2 \left(\sin \sqrt{x^5 + x} \right)} \cdot \cos \left(\sqrt{x^5 + x} \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^5 + x}} \cdot (5x^4 + 1), \quad \text{при условии} \\ \cos \left(\sin \sqrt{x^5 + x} \right) \neq 0, \quad x^5 + x > 0. \quad \square$$

3. Производная обратной функции: если функция $x = x(y)$ обратима и имеет производную $x'(y)$ ($\neq 0$) в точке y , то обратная функция¹ $y = y(x)$ имеет производную в соответствующей точке x , причём $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$, или $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

Пример 6. Используя свойство производных обратных функций, найти y' , если $y = \arccos x$.

Решение. Выражая из уравнения $y = \arccos x$ переменную x через y (для этого применяем к обеим частям этого равенства функцию косинус и используем тождество $\cos(\arccos x) = x$ при $x \in [-1, 1]$), получим обратную зависимость: $x = \cos y$, $y \in [0, \pi]$. С учётом тождества $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, при $x \in (-1, 1)$ получаем искомую производную:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad \square$$

¹Пусть функция $y = f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение своей области определения $D(f)$ на область значений $E(f)$ (иными словами, из условия $x_1 \neq x_2$ следует $y_1 \neq y_2$). В этом случае функцию называют *обратимой*, а уравнение $y = f(x)$ можно при любом y однозначно разрешить относительно x , т. е. для каждого y найти единственное соответствующее значение x . Это соответствие определяет функцию, которую называют *обратной* к функции f и обозначают символом f^{-1} . Обозначая в последнем соответствии независимую переменную буквой x , а зависимую — y , получим пару взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$. Их графики симметричны относительно прямой $y = x$, при этом выполняются соотношения:

- 1) $D(f) = E(f^{-1})$, $E(f) = D(f^{-1})$;
- 2) $f(f^{-1}(x)) = x$, $\forall x \in D(f^{-1})$; $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in D(f)$;
- 3) если одна из этих функций строго возрастает (убывает), то вторая также является возрастающей (убывающей);
- 4) если одна из этих функций нечётная, то и обратная к ней функция также является нечётной.

1.3 Производная показательно-степенной функции

Рассмотрим приёмы, используемые при дифференцировании показательно-степенных¹ функций. Пусть требуется найти производную функции $y = u^v$ ($u > 0$) в точке x в предположении, что функции $u(x), v(x)$ дифференцируемы в этой точке.

Предварительное логарифмирование. Обратимся к приёму, состоящему в предварительном логарифмировании функции. Прологарифмируем равенство $y = u^v$ по основанию e (возьмём натуральный логарифм):

$$\ln y = \ln(u^v) = v \ln u$$

и затем продифференцируем его по переменной x с учётом, что y есть функция x :

$$(\ln y)' = (v \ln u)' \Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u},$$

откуда, умножая на y , находим искомую производную

$$y' = y \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right) = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right).$$

Полученную формулу запоминать не стоит, гораздо важнее запомнить её вывод.

Пример 7. Найти производные показательно-степенных функций, используя предварительное логарифмирование:

$$\text{а) } y = x^x; \quad \text{б) } y = (1 + 4x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

Решение. а) Прологарифмируем равенство $y = x^x$ при $x > 0$ по основанию e : $\ln y = \ln(x^x) = x \ln x$. Теперь продифференцируем по x полученное равенство:

$$\frac{y'}{y} = (x \ln x)' \Leftrightarrow y' = y \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1).$$

б) Возьмём натуральный логарифм:

$$\ln y = \ln((1 + 4x)^{\operatorname{ctg} x}) = \operatorname{ctg} x \cdot \ln(1 + 4x),$$

тогда, дифференцируя обе части по x , получаем

$$\frac{y'}{y} = (\operatorname{ctg} x \ln(1 + 4x))' \Rightarrow y' = y \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \ln(1 + 4x) + \operatorname{ctg} x \cdot \frac{4}{1 + 4x} \right),$$

где $x > -\frac{1}{4}$, $\sin x \neq 0$. $\square$

¹Показательно-степенной называется функция u^v , где $u(x), v(x)$ — элементарные функции, $u(x) > 0$. П.-с. функции относят к элементарным.

Переход к экспоненте в основании степени. Рассмотрим ещё один приём дифференцирования показательно-степенных функций, состоящий в переходе к экспоненте в основании степени:

$$y = u^v = e^{\ln(u^v)} = e^{v \ln u}.$$

Дифференцируя теперь по x полученное равенство (по правилам дифференцирования сложной функции), получаем тот же результат, что и выше:

$$y' = (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u} (v \ln u)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right).$$

Пример 8. Найти y' , переходя к экспоненте в основании, если $y = x^x$.

Решение. $y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$, тогда $y' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$, $x > 0$. $\square$

1.4 Производная произведения трёх и более функций

«Страшно, когда человек говорит и не знаешь, зачем он говорит, что говорит и кончит ли когда-нибудь».

М. Е. Салтыков-Щедрин (1826–1889) – русский писатель, журналист, Рязанский и Тверской вице-губернатор. Автор произведений «Господа Головлёвы», «Как один мужик двух генералов прокормил», «История одного города» и др.

Пусть необходимо найти производную функции, имеющей вид произведения нескольких функций. В такой ситуации существуют две возможности.

Производная произведения. Если дифференцируемая функция имеет вид произведения нескольких сомножителей $u = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$, то можно применить формулу дифференцирования произведения

$$(u_1 u_2 \dots u_n)' = u_1' u_2 \dots u_n + u_1 u_2' \dots u_n + u_1 u_2 \dots u_n',$$

которая доказывается методом математической индукции.

Пример 9. Найти y' , если $y = \sqrt[3]{x^4} \cdot \arcsin 2x \cdot 2^{\sin x}$.

Решение. Так как $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$, то при $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ имеем:

$$\begin{aligned} y' &= (x^{\frac{4}{3}})' \cdot \arcsin 2x \cdot 2^{\sin x} + \sqrt[3]{x^4} \cdot (\arcsin 2x)' \cdot 2^{\sin x} + \sqrt[3]{x^4} \cdot \arcsin 2x \cdot (2^{\sin x})' = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} \cdot \arcsin 2x \cdot 2^{\sin x} + \sqrt[3]{x^4} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2^{\sin x} + \sqrt[3]{x^4} \cdot \arcsin 2x \cdot 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x. \quad \square \end{aligned}$$

Предварительное логарифмирование. Если же дополнительно известно, что в области дифференцируемости все сомножители положительны, то можно воспользоваться предварительным логарифмированием:

$$\ln(u_1 u_2 \dots u_n) = \ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_n,$$

после чего полученная сумма дифференцируется (а сумму дифференцировать, вообще говоря, проще, чем произведение):

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \dots + \frac{u'_n}{u_n}$$

и в конце умножают на y .

Пример 10. Найти производную функции

$$y = \sqrt[7]{x^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} \cdot (x^2 + 2x)^3, \text{ где } x > 1.$$

Решение. Прологарифмируем и упростим для последующего дифференцирования:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln \sqrt[7]{x^3} + \ln \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} + \ln(x^2 + 2x)^3 \Leftrightarrow \\ \ln y &= \frac{3}{7} \ln x + \frac{1}{4} \ln(x-1) - \frac{1}{4} \ln(x+1) + 3 \ln x + 3 \ln(x+2). \end{aligned}$$

Дифференцируя теперь полученное равенство, получаем

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{3}{7x} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{x} + \frac{3}{x+2} \Rightarrow \\ y' &= y \left(\frac{3}{7x} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{x} + \frac{3}{x+2} \right), \quad x > 1. \quad \square \end{aligned}$$

1.5 Другие приёмы дифференцирования функций

«Мы тонем в информации и задыхаемся от нехватки знаний».

*Джон Нейзбитт (1929–2021), американский писатель
и футуролог.*

Предварительное преобразование функции. Перед дифференцированием функции следует проверить, можно ли её предварительно преобразовать, приведя к виду, удобному для последующего дифференцирования.

Пример 11. Найти производные функций:

$$\text{а) } y = \log_{\sin x} \cos x; \quad \text{б) } y = \lg(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x).$$

Решение. а) Перейдём к основанию e : $y = \frac{\ln \cos x}{\ln \sin x}$, тогда по формуле производной частного имеем ($0 < \sin x < 1$, $\cos x > 0$)

$$y' = \frac{-\operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x - \operatorname{ctg} x \cdot \ln \cos x}{\ln^2 \sin x}.$$

б) Так как $y = \lg(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x) = \lg 1$, то $y' \equiv 0$. $\square$

Использование особенностей функции. Иногда при дифференцировании используются специальные упрощающие приёмы, учитывающие специфику функции.

Пример 12. Найти $f'(1)$, если

$$f(x) = (x-1) \left(\sqrt[4]{x + \sqrt{x} - 1} + (x-1) \sqrt[5]{x + 2\sqrt[4]{x}} \right).$$

Решение. Не будем действовать стандартно: дифференцировать функцию и затем вычислять полученную производную в точке $x = 1$. Поступим иначе. Функция имеет вид $f(x) = (x-1)g(x)$, где $g(x) = \sqrt[4]{x + \sqrt{x} - 1} + (x-1)\sqrt[5]{x + 2\sqrt[4]{x}}$ — дифференцируема в точке $x = 1$. Продифференцируем $f(x)$ в общем виде: $f'(x) = g(x) + (x-1)g'(x)$, откуда $f'(1) = g(1)$. Заметим, что при таком решении не понадобилась производная в общем виде, но если бы производную надо было вычислить в любой другой точке, отличной от 1, то этот приём не сработал бы. Здесь же легко находится $g(1) = 1$, поэтому $f'(1) = 1$. $\square$

Введение промежуточной переменной и сведение к сложной функции. Если переменная x в записи функции присутствует только в составе некоторого повторяющегося выражения, то это выражение целесообразно заменить новой переменной, и затем воспользоваться формулой для дифференцирования сложных функций.

Пример 13. Найти производную функции, вводя промежуточную переменную и используя правило дифференцирования сложной функции:

$$y = \frac{5 \sin^2 x + 1}{\ln(\sin x + 2)}.$$

Решение. Введём промежуточную переменную $t = \sin x$ и получим суперпозицию функций $y = u(t(x))$, где $u(t) = \frac{5t^2 + 1}{\ln(t + 2)}$. По теореме о дифференцировании сложной функции тогда имеем

$$y'(x) = u'(t) \cdot t'(x) = \frac{10t \ln(t + 2) - (5t^2 + 1) \cdot \frac{1}{t+2}}{\ln^2(t + 2)} \cdot \cos x,$$

где t следует везде заменить на $\sin x$. При таком способе дифференцирования всего лишь один раз — в самом конце — осуществляется умножение на $t'(x) = \cos x$. $\square$

1.6 Задачи для самостоятельного решения

Найти производные сложных функций с указанием их области дифференцируемости:

№1. [7, №901] $y = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right);$

№2. $y = \log_7(\cos^5 x);$

№3. [7, №969] $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x);$

№4. [7, №970] $y = \arccos \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right);$

№5. [7, №968] $y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln \left(\operatorname{cth} \frac{x}{2} \right);$

№6. $y = \sin^5(\cos^2 x);$

№7. [7, №864] $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x);$

№8. $y = 10^{\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x^2-8}};$

№9. [7, №888] $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x));$

№10. [7, №910] $y = \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right);$

№11. [7, №922] $y = \arccos(\cos^2 x);$

№12. [7, №924] $y = \arccos \sqrt{1-x^2};$

№13. [7, №859] $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot (x + \sqrt{1+x^2})};$

№14. $y = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + 3x^2}}};$

№15. [7, №898] $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2});$

№16. [7, №940] $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x};$

№17. [7, №905] $y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}};$

№18. [7, №938] $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}};$

№19. [7, №955] $y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}};$

№20. [7, №965] $y = (\ln x)^x : x^{\ln x}.$

Используя формулу дифференцирования произведения нескольких функций, найти производную:

№21. [7, №842] $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3;$

№22. [7, №884] $y = \left(\frac{a}{b} \right)^x \cdot \left(\frac{b}{x} \right)^a \cdot \left(\frac{x}{a} \right)^b \quad (a > 0, b > 0).$

№23. Найти $y'(0)$, если $y = x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2000).$

Найти производную, вводя промежуточную переменную и затем дифференцируя как сложную функцию:

№24. [7, №972] $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x});$

№25. [7, №974] $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt[4]{1 + x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1 + x^4} + 1}{\sqrt[4]{1 + x^4} - 1};$

№26. $y = e^{n \ln x} (\cos(n \ln x) + \sin(n \ln x));$

№27. [7, №959] $y = e^{m \cdot \arcsin x} (\cos(m \cdot \arcsin x) + \sin(m \cdot \arcsin x)).$

Объяснить, почему функция не дифференцируема ни в одной точке:

№28. $y = \sqrt{\log_2(\sin x)};$

№29. $y = \sin(\arccos(\operatorname{ch}(x^2))) \cdot \cos(\arcsin(\operatorname{ch}(x^2)));$

№30. $y = \arcsin(\operatorname{sh}^4(x + 4 \sin(xe^{\pi x})) + 2^{x^2+1}).$

№31. Найти производную функции

$$y = \frac{1}{\operatorname{th}^{100}(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}))}.$$

По свойству производных обратных функций найти y' :

№32. $y = \operatorname{arctg} x;$

№33. $y = \log_a x.$

№34. Найти обратную функцию и её производную, если

$$y = \frac{2x + 3}{5x - 2}.$$

№35. Найти производную функции $y = \operatorname{arsh} x$ (ареасинус), являющейся обратной к гиперболическому синусу $y = \operatorname{sh} x$, двумя способами:

а) найдя ареасинус и затем продифференцировав его;

б) по теореме о производной обратной функции (не находя ареасинуса в явном виде).

№36. Известно, что функция f удовлетворяет уравнению $f\left(\frac{1}{2}(4^y + 4^{-y})\right) \equiv y$ для любого $y \geq 0$. Найти производную обратной функции f^{-1} и установить её знак.

№37. Найти y' , если $y = \ln(x + \ln(x + \ln(x + \dots)))$.

№38. Найти y' , если $y = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \dots}}}$.

Найти производную, предварительно упростив функцию:

№39. $y = \ln \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}};$

№40. $y = \sin^4 x + \cos^4 x;$

№41. $y = \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}}$, где $x \in (10, 17);$

№42. $y = \ln\{x^2 + 5\}$, где $x \in (\sqrt{3}, 2)$, $\{\cdot\}$ – дробная часть;

№43. $y = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x};$

№44. $y = 4 \operatorname{sh}^3 x + 3 \operatorname{sh} x$;

№45. $y = \arcsin(\cos(\arcsin x)) + \arccos(\sin(\arccos x))$;

№46. $y = \sin(2 \arccos x)$;

№47. $y = \arccos(\cos x)$, где $x \in (\pi, 2\pi)$.

Указание: воспользоваться тем, что

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } x \in [2\pi n, \pi + 2\pi n], \\ -x + 2\pi n, & \text{если } x \in [-\pi + 2\pi n, 2\pi n], \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

№48. При всех $a \in \mathbb{R}$ найти производную функции

$$y = \frac{x^2 - a}{x^2 + a}.$$

№49. Пусть $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Найти производную функции

$$y = f(f(f(f(f(x)))))$$

Предварительно логарифмируя, найти производную:

№50. $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$;

№51. $y = x^{e^x} \cdot x^9$;

№52. $y = x^{a^x}$, $a > 0$;

№53. $y = \frac{\sqrt{x+2} \cdot (3-x)^6}{(x-1)^3 \cdot \sqrt[4]{3x-2}}$, $x > 3$.

Найти y' , переходя к экспоненте в основании:

№54. $y = (1 + 4x)^{\operatorname{ctg} x}$;

№55. $y = x^{\ln x}$;

№56. $y = x^{x^x}$.

Найти производные показательно-степенных функций:

№57. [7, №963] $y = x^{\frac{1}{x}}$.

№58. [7, №962] $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$ ($a > 0$, $x > 0$);

№59. [7, №964] $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.

№60. $y = (x^2 + 1)^{\cos \frac{x}{2}}$.

№61. [7, №883] $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$.

Найти производную, предварительно приведя функцию к явному виду:

№62. Найти производную неявно заданной функции, приведя её к явному виду $y = y(x)$: $\sqrt[3]{xy} = \sin(\log_5 x)$.

№63. Найти $y'(x)$, приведя функцию, заданную параметрически системой

$$\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \arccos t, \end{cases}$$

где параметр $t \in [-1, 1]$, к явному виду.

№64. Найти производную $g'(x)$, если известно, что при всех $x \in \mathbb{R}$ функция $g(x)$ задана неявно системой уравнений $f(x) = 5 - 2x$, $f(2 - 3g(x)) = 13 - 24x$.

№65. Найти f' , если известно, что функция f удовлетворяет при любых действительных x и y функциональному уравнению

$$f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy.$$

№66. Найти f' , если известно, что функция f удовлетворяет при любых действительных x функциональному уравнению

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2.$$

№67. Найти f' на интервале $(0, \frac{3}{5})$, если

$$y = \min \left(1 - x; 2x - 1; \frac{x}{3} \right).$$

Здесь $\min(a, b, c)$ – наименьшее из чисел a, b, c .

Используя разные приёмы, решить задачи:

№68. Представьте, что вы шесть раз последовательно продифференцировали функцию

$$y = (3x + 5)^2(2x^2 + 3)(x + 7)^2$$

(всякий раз производная берётся от предыдущей производной). Чему равна последняя (шестая) производная $y^{(6)}(x)$? Решить задачу, не раскрывая скобок.

№69. Функция задана степенным рядом

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Почленным дифференцированием ряда найти производную $y'(x)$ и показать, что функция y удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $y' = y$. Что это за функция?

№70. Найти способ вычисления предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

сведением к вычислению производной некоторой функции в точке $x = 0$.

№71. [7, №844] Доказать формулу для производной дробно-линейной функции:

$$\left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx + d)^2}, \quad \text{где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

есть определитель второго порядка.

1.7 Ответы и решения

1. $y' = \frac{1}{\sin x}$, где $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. $y' = (\log_7(\cos^5 x))' = \frac{1}{\cos^5 x \cdot \ln 7} \cdot 5 \cos^4 x \cdot (-\sin x)$ при $\cos x > 0$.

3. $y' = \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$.

4. Имеем

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} \cdot \left(-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) \cdot \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \operatorname{ch}^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{sh} x}{\frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x}}{|\operatorname{ch} x|} \cdot \operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x} \cdot \operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{|\operatorname{sh} x| \cdot \operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

5. $y' = -\frac{2}{\operatorname{sh}^3 x} \quad (x > 0)$.

6. $y' = 5 \sin^4(\cos^2 x) \cdot \cos(\cos^2 x) \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$.

7. $y' = -\sin 2x \cdot \cos(\cos 2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

8. $y' = 10^{\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x^2-8}} \cdot \ln 10 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x-1}{x^2-8}\right)^2} \cdot \frac{2(x^2-8) - 2x(2x-1)}{(x^2-8)^2}$, $x \neq \pm\sqrt{8}$.

9. $y' = \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2 \ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)}$, $x > 1, x \neq e$.

10. $y' = -\frac{1 + x + \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}}{(1 + x \ln \frac{1}{x})(1 + x \ln(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}))}$.

11. $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^4 x}} \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) = \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x} \sqrt{1 + \cos^2 x}} =$

$$= \frac{2 \sin x \cos x}{|\sin x| \sqrt{1 + \cos^2 x}} = \frac{2 \operatorname{sgn}(\sin x) \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

12. $y' = \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (0 < |x| < 1)$.

13. $y' = -\frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

14. При $x \neq -\frac{1}{3}; 0$ имеем $y' = \frac{1}{3} \left(x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + 3x^2}} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{3} \left(x + \sqrt[3]{x + 3x^2} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{3} (x + 3x^2)^{-\frac{2}{3}} (1 + 6x) \right) \right).$$

15. $y' = \sqrt{x^2 + a^2}$.

16. $y' = \frac{x \cdot \arcsin x}{(1 - x^2)^{3/2}}$, где $|x| < 1$.

17. $y' = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$, где $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

18. $y' = -\frac{x^2}{\arccos x}$, где $0 < |x| < 1$.

19. $y' = \frac{\sqrt{1 + x^4}}{1 - x^4}$, где $|x| \neq 1$.

20. $y' = \frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x + 1}}(x - 2 \ln^2 x + x \ln x \cdot \ln(\ln x))$, где $x > 1$.

21. Поскольку $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$, то

$$\begin{aligned} y' &= -(1 - x^2)^2(1 - x^3)^3 + (1 - x)2(1 - x^2)(-2x)(1 - x^3)^3 + \\ &\quad + (1 - x)(1 - x^2)^2 3(1 - x^3)^2(-3x^2) = \\ &= -(1 - x)^2(1 - x^2)(1 - x^3)^2(1 + 6x + 15x^2 + 14x^3), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

22. $y' = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \ln \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b + \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot b^a(-a)x^{-a-1} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b +$
 $\left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot a^{-b}bx^{b-1} = y \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a-b}{x} \right), \quad x > 0.$

23. Имеем

$$\begin{aligned} y'(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2000) + x(x-2)(x-3)\dots(x-2000) + \\ &\quad x(x-1)(x-3)\dots(x-2000) + \dots + x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-1999). \end{aligned}$$

Тогда $y'(0) = 2000!$, так как все слагаемые, кроме первого, содержат множитель x , обращающий соответствующее произведение в нуль при $x = 0$.

24. Обозначим $u = \cos^2 x$, тогда имеем $y = \ln(u + \sqrt{1 + u^2})$. Продифференцируем y по u :

$$y'_u = \frac{1}{u + \sqrt{1 + u^2}} \cdot \left(1 + \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Продифференцируем u по x : $u'_x = 2 \cos x(-\sin x) = -\sin 2x$. Тогда

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \cdot (-\sin 2x) = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

25. Введём промежуточную переменную $u = \sqrt[4]{1 + x^4}$, тогда $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u + \frac{1}{4} \ln \frac{u+1}{u-1}$ и, соответственно,

$$y'_u = \frac{1}{2(1 + u^2)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{(u+1)'(u-1) - (u+1)(u-1)'}{(u-1)^2} =$$

$$\frac{1}{2(1+u^2)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{-2}{(u-1)^2} = \frac{1}{2(1+u^2)} - \frac{1}{2(u^2-1)} = \frac{1}{1-u^4}, \quad u'_x = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}.$$

Тогда $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{1-u^4} \cdot \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} = \frac{1}{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} = -\frac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}},$
 $x \neq 0$.

26. Положим $t = n \ln x$, тогда $y = u(t(x))$. Поскольку $u' = (e^t(\cos t + \sin t))' = 2e^t \cos t$, то окончательно получим

$$y'(x) = u'(t) \cdot t'(x) = 2e^{n \ln x} \cos(n \ln x) \cdot \frac{n}{x}, \quad x > 0.$$

27. Сделаем замену $u = m \cdot \arcsin x$, тогда

$$y' = \frac{2m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{m \cdot \arcsin x} \cdot \cos(m \cdot \arcsin x), \quad \text{где } |x| < 1.$$

28. Найдём область определения функции: $\log_2(\sin x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$, т. е. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Поскольку функция определена в отдельных точках, то она не дифференцируема.

29. Известно, что арккосинус определён при условии $-1 \leq \operatorname{ch}(x^2) \leq 1$, но в то же время $\operatorname{ch}(x^2) \geq 1$. Отсюда получаем область определения функции: $\operatorname{ch}(x^2) = 1$, т. е. $x^2 = 0$. Функция нигде не дифференцируема, так как определена в единственной точке $x = 0$.

30. Аргумент функции строго больше единицы, поскольку первое слагаемое неотрицательно, а второе $2^{x^2+1} \geq 2$. Функция нигде не определена и, следовательно, не может быть дифференцируемой.

31. Упростив функцию, получим: $y = \frac{1}{\operatorname{th}^{100}(\ln 1)}$. Поскольку в знаменателе стоит нуль, то функция нигде не определена и, следовательно, нигде не дифференцируема.

32. Обратной функцией для $y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}$, является $x = \operatorname{tg} y, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, поэтому

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \cos^2(\operatorname{arctg} x).$$

Упростим выражение $\cos^2(\operatorname{arctg} x)$. Так как $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, то $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$. Подставляя в последнее равенство $\alpha = \operatorname{arctg} x$, получим: $\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}$. Итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}$.

33. Обратной к логарифмической функции будет показательная $x = a^y$, поэтому

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0.$$

34. Чтобы найти обратную функцию, из равенства $y = \frac{2x+3}{5x-2}$ выразим переменную x через y : $x = \frac{2y+3}{5y-2}$ и поменяем местами x и y : $y = \frac{2x+3}{5x-2}$ — это функция, обратная к исходной дробно-линейной функции, и мы видим, что прямая и обратные функции в данном случае совпали. Продифференцируйте функцию самостоятельно.

35. а) Введём для удобства промежуточную переменную $t = e^x$, тогда $y = \frac{t-t^{-1}}{2} \Leftrightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$. В силу положительности t имеем $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, откуда логарифмированием получаем: $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. Итак, обратная функция (её называют аресинус и обозначают $y = \operatorname{arsh} x$) имеет вид: $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$. Осталось продифференцировать: $y' = \dots = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

б) Пусть $y = \operatorname{arsh} x$, тогда обратная к ней $x = \operatorname{sh} y$. По теореме о производной обратной функции имеем:

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

36. Известно, что если при всех допустимых y выполнено тождество $f(f^{-1}(y)) \equiv y$, то функция $f^{-1}(y)$ является обратной к функции f . Поэтому $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(4^y + 4^{-y})$ является обратной к f , и её производная $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{2} \ln 4 \cdot (4^y - 4^{-y}) > 0$ при $y > 0$ (обе функции f и f^{-1} возрастают).

37. Пропотенцируем равенство $y = \ln(x + \ln(x + \ln(x + \dots)))$ по основанию e : $e^y = x + \ln(x + \ln(x + \dots)) \Leftrightarrow e^y = x + y$, откуда можно найти обратную функцию $x = e^y - y$. Тогда

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(e^y - y)'_y} = \frac{1}{e^y - 1} = \frac{1}{e^{\ln(x + \ln(x + \ln(x + \dots)))} - 1} = \\ &= \frac{1}{x + \ln(x + \ln(x + \dots)) - 1}. \end{aligned}$$

38. Здесь производную удобнее найти через производную обратной функции. Найдём обратную функцию: $y^3 = x + y$, откуда $x = y^3 - y$. По теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(y^3 - y)'} = \frac{1}{3y^2 - 1} = \frac{1}{3 \left(\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \dots}}} \right)^2 - 1}.$$

39. На области определения преобразуем функцию к виду: $y = \frac{1}{5}(\ln(1-x) - \ln(1+x))$ и лишь затем продифференцируем:

$$y' = \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) = \frac{2}{5(x^2-1)}.$$

40. $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$. Продифференцировав, получим

$$y' = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \right)' = -\sin 4x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

41. Положим $t = \sqrt{x-1}$, $t \in (3, 4)$, тогда $x = t^2 + 1$, и функция принимает вид $f(t) = \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = |t-2| + |t-3|$. На интервале $(3, 4)$ оба модуля раскрываются положительно и получаем $f(t) = 2t - 5$, или, возвращаясь к прежней переменной, $y = 2\sqrt{x-1} - 5$. Дифференцируя эту функцию, находим $y' = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

42. Во-первых, уберём целое число из-под знака дробной части: $y = \ln\{x^2\}$. Во-вторых, вычислим дробную часть на заданном интервале. Так как $x^2 \in (3, 4)$, то $[x^2] = 3$, а значит, $\{x^2\} = x^2 - [x^2] = x^2 - 3$. Тогда функция принимает вид $y = \ln(x^2 - 3)$, поэтому $y' = \frac{1}{x^2 - 3} \cdot 2x$.

$$\mathbf{43.} \quad \left(\frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x} \right)' = (\operatorname{th} 2x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 2x} \cdot (2x)' = \frac{2}{\operatorname{ch}^2 2x}.$$

$$\mathbf{44.} \quad (4 \operatorname{sh}^3 x + 3 \operatorname{sh} x)' = (\operatorname{sh} 3x)' = 3 \operatorname{ch} 3x.$$

45. Упрощая функцию (при $|x| \leq 1$), получаем:

$$y = \arcsin \sqrt{1-x^2} + \arccos \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2},$$

отсюда $y' \equiv 0$ при $|x| < 1$.

46. Имеем $\sin(2 \arccos x) = 2 \sin(\arccos x) \cdot \cos(\arccos x) = 2\sqrt{1-x^2} \cdot x$, где $|x| < 1$, поэтому $y' = (2x\sqrt{1-x^2})' = 2 \cdot \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

47. Имеем при $x \in (\pi, 2\pi)$: $y = 2\pi - x$, следовательно $y' = -1$.

48. 1) При $a < 0$ имеем $y \equiv 1$, поэтому $y' \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$; 2) если $a = 0$, то $y \equiv 1$ при $x \neq 0$, поэтому $y' \equiv 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; 3) если $a > 0$, то $y \equiv 1$ при $x \neq \pm\sqrt{a}$, поэтому $y' \equiv 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{a}\}$. В последнем случае в точках $x = \pm\sqrt{a}$ производная не существует (функция не дифференцируема).

49. Заметим, что $f(x) = (x+6)^2 - 6$. Тогда $f(f(f(f(f(x)))))) = (x+6)^{32} - 6$, поэтому $y' = 32(x+6)^{31}$.

50. Имеем $\ln y = \sin x \cdot \ln(x^2+1) \Rightarrow$ дифференцируя это равенство, получаем $\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln(x^2+1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow y' = (x^2+1)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x^2+1) + \frac{2x \cdot \sin x}{x^2+1} \right)$.

51. Область определения функции: $x > 0$. Прологарифмируем данную (положительную) функцию: $\ln y = \ln(x^{e^x} \cdot x^9) = e^x \ln x + 9 \ln x$. Дифференцируя теперь по x обе части равенства, получаем

$$\frac{y'}{y} = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} + \frac{9}{x},$$

откуда $y' = y \left(e^x \ln x + \frac{e^x + 9}{x} \right) = (x^{e^x} \cdot x^9) \left(e^x \ln x + \frac{e^x + 9}{x} \right)$.

52. Логарифмируя, находим $\ln y = a^x \ln x$. Дифференцируя затем по x , при $x > 0$ получаем

$$\frac{y'}{y} = (a^x \ln a) \ln x + a^x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = x^{a^x} a^x \left(\ln a \ln x + \frac{1}{x} \right).$$

53. Прологарифмируем функцию, а затем возьмём производную:

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x+2) + 6 \ln(x-3) - 3 \ln(x-1) - \frac{1}{4} \ln(3x-2) \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x+2)} + \frac{6}{x-3} - \frac{3}{x-1} - \frac{3}{4(3x-2)} \text{ и так далее.}$$

54. Преобразуем функцию к виду $y = e^{\ln(1+4x) \operatorname{ctg} x} = e^{\operatorname{ctg} x \ln(1+4x)}$, тогда при $x > -\frac{1}{4}$, $\sin x \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} y' &= (e^{\operatorname{ctg} x \ln(1+4x)})' = e^{\operatorname{ctg} x \ln(1+4x)} (\operatorname{ctg} x \ln(1+4x))' = \\ &= (1+4x)^{\operatorname{ctg} x} \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \ln(1+4x) + \operatorname{ctg} x \cdot \frac{1}{1+4x} \cdot 4 \right). \end{aligned}$$

55. Перейдём к экспоненте в основании при $x > 0$: $y = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x} \Rightarrow$

$$y' = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = 2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x.$$

56. При $x > 0$ имеем $y = x^{x^x} = e^{x^x \ln x}$. Тогда, дифференцируя эту сложную функцию, получаем: $y' = x^{x^x} (x^x \ln x)' = x^{x^x} (x^x (\ln x + 1) \ln x + x^{x-1})$.

57. $y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x)$, $x > 0$.

58. Имеем при $x > 0$:

$$(x^{x^a})' = (e^{x^a \ln x})' = x^{x^a} (x^a \ln x)' = x^{x^a} \left(a x^{a-1} \ln x + x^a \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{a-1} x^{x^a} (a \ln x + 1);$$

$$(x^{a^x})' = (e^{a^x \ln x})' = x^{a^x} \left(a^x \ln a \ln x + a^x \cdot \frac{1}{x} \right) = a^x x^{a^x} \left(\ln a \ln x + \frac{1}{x} \right);$$

$$(a^{x^x})' = a^{x^x} \ln a \cdot (x^x)' = x^x a^{x^x} \ln a (1 + \ln x).$$

$$\begin{aligned} \text{59. Имеем } y' &= (e^{\cos x \ln \sin x})' = (\sin x)^{\cos x} (\cos x \ln \sin x)' = \\ &= (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right) = (\sin x)^{\cos x+1} \cdot (\operatorname{ctg}^2 x - \ln \sin x), \end{aligned}$$

$\sin x > 0$. Аналогично дифференцируется второе слагаемое.

Ответ: $y' = (\sin x)^{\cos x+1} \cdot (\operatorname{ctg}^2 x - \ln \sin x) - (\cos x)^{\sin x+1} \cdot (\operatorname{tg}^2 x - \ln \cos x)$, где $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{60. Имеем } y = (x^2 + 1)^{\cos \frac{x}{2}} \Rightarrow \ln y = \cos \frac{x}{2} \ln(x^2 + 1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (\ln y)' &= \left(\cos \frac{x}{2} \ln(x^2 + 1) \right)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + \cos \frac{x}{2} \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \\ \Rightarrow y' &= (x^2 + 1)^{\cos \frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \cos \frac{x}{2}}{x^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

$$\text{61. } y' = e^x (1 + e^{e^x} (1 + e^{e^x})), x \in \mathbb{R}.$$

62. Выразим y из этого равенства: $xy = \sin^3(\log_5 x) \Rightarrow y = \frac{1}{x} \sin^3(\log_5 x)$ ($x > 0$) и, продифференцировав, получим

$$y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \sin^3(\log_5 x) + \frac{1}{x} \cdot 3 \sin^2(\log_5 x) \cdot \cos(\log_5 x) \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 5}.$$

63. Заметим, что в силу известного тождества $x + y = \arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$, откуда находим: $y = \frac{\pi}{2} - x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, следовательно, $y' = -1$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

64. По условию имеем: $5 - 2(2 - 3g(x)) = 13 - 24x$, откуда $g(x) = 2 - 4x \Rightarrow g'(x) = -4$.

65. Положив в данном уравнении $y = x$, приходим к тождеству $f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2$, откуда находим искомую функцию $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}f(0)$. Для определения $f(0)$ подставим в последнее равенство $x = 0$: $f(0) = \frac{1}{2}f(0)$, т. е. $f(0) = 0$. Итак, $f(x) = x^2$, следовательно $f'(x) = 2x$.

66. Найдём вначале $f(x)$. Положим в уравнении $y = 1 - x \Rightarrow x = 1 - y$, и уравнение примет вид $2f(1 - y) + f(y) = (1 - y)^2$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Переобозначив в последнем тождестве y на x , получим, что равенство $2f(1 - x) + f(x) = (1 - x)^2$ выполняется при всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда имеем систему двух уравнений, верных при всех $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1 - x) = x^2, \\ 2f(1 - x) + f(x) = (1 - x)^2, \end{cases}$$

из которой находим $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.

67. Построив на указанном интервале графики всех трёх функций, видим, что ниже других расположен график функции $y = 2x - 1$. Следовательно, на данном интервале функция имеет вид $y = 2x - 1 \Rightarrow y' = 2$.

68. Если гипотетически раскрыть скобки, то получится многочлен шестой степени: $y = c_6x^6 + c_5x^5 + \dots + c_1x + c_0$. При последнем, шестом, дифференцировании все слагаемые (в производной пятого порядка), кроме первого, обнулятся, и останется шестая производная первого слагаемого. Она равна $y^{(6)} = c_6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6! c_6$. Таким образом, чтобы найти производную шестого порядка исходной функции, нам надо найти только коэффициент многочлена при старшей степени x^6 , т. е. c_6 . Находим его, перемножая коэффициенты при старших степенях x в каждом из трёх сомножителей. Находим $c_6 = 9 \cdot 2 \cdot 1 = 18$. Итак, $y^{(6)}(x) = 18 \cdot 6! = 12960$.

69. $y' = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = y$. Это экспоненциальная функция $y = e^x$.

70. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+4} - 2$ и вычислим её производную в точке $x = 0$ по определению производной:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2) - 0}{x}.$$

Очевидно, это искомый предел и он равен $f'(0)$. Тогда

$$f'(x) = (\sqrt{x+4} - 2)' = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \Big|_{x=0} = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{71.} \quad y' &= \frac{(ax+b)'(cx+d) - (ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2} = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \\ &= \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}, \quad cx+d \neq 0. \end{aligned}$$

2 СЕМИНАР: Дифференцируемость: производная и дифференциал

*«Всякий, кто не может разобраться в математике, — не вполне человек.
В лучшем случае — безвредный недочеловек, научившийся носить обувь,
мыться и не мусорить в доме».*

*Роберт Энсон Хайнлайн (1907–1988) – американский
писатель, один из крупнейших писателей-фантастов,
во многом определивший лицо современной научной
фантастики.*

2.1 Понятие производной явно заданной функции

Вычисление производных и дифференциалов, изучение их свойств, а также их применение в решении разного рода задач составляют главный предмет дифференциального исчисления.¹ Производная функции в точке – основное понятие, характеризующее скорость изменения функции в данной точке.

Понятие производной возникло в 17 веке в связи с необходимостью решения задач из физики, механики и математики, в первую очередь следующих двух: определение скорости прямолинейного неравномерного (ускоренного) движения и построения касательной к произвольной плоской кривой. Немецкий учёный Готфрид Вильгельм *Лейбниц* (1646–1716) ввёл обозначения dx для бесконечно малого приращения аргумента и dy – для обозначения бесконечно малого приращения функции и назвал их дифференциалами (см. строгое определение дифференциала функции далее). Поэтому ныне употребляемый символ производной $\frac{dy}{dx}$ берёт свое начало от Лейбница.

Греческой буквой Δ в середине 18 века Леонард *Эйлер* (1707–1783) стал пользоваться для обозначения (не обязательно бесконечно малых) приращений переменных. Обозначения y' и $f'(x)$ для производной ввёл французский учёный Жозеф Луи *Лагранж* (1736–1813). В физике и механике в некоторых случаях производные по времени обозначают точками над буквой: $\dot{y}(t) = at$.

Определение производной. Производная определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Подробнее, пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Придадим

¹*Дифференциальное исчисление* – раздел математического анализа, в котором изучаются понятия производной и дифференциала и способы их применения к исследованию функций. (Большая Советская энциклопедия (БСЭ) под ред. академика, лауреата Нобелевской премии А.М. Прохорова, – одна из крупнейших и наиболее авторитетных универсальных энциклопедий в мире).

аргументу x в точке x_0 малое приращение Δx (так, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ не вышла за пределы окрестности) и получим соответствующее приращение функции $\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Составим в точке x_0 разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и устремим $\Delta x \rightarrow 0$. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то его называют *производной* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$ или $\frac{df(x_0)}{dx}$. Этот предел допускает эквивалентную формулу:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Пример 14. Найти $f'(x_0)$ ($x_0 \in \mathbb{R}$), если $y(x) = \sin x$.

Решение. Применяя определение, получаем

$$y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cdot \cos \frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \cos x_0. \quad \square$$

Пример 15. Найти производную функции $f(x) = x\sqrt{(1-x)^2 \cdot \sin(x^2)}$ на $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

Решение. Применяя формально правила дифференцирования, получаем

$$f'(x) = \sqrt{(1-x)^2 \cdot \sin(x^2)} + x \cdot \frac{-2(1-x) \cdot \sin(x^2) + (1-x)^2 \cdot 2x \cos(x^2)}{2\sqrt{(1-x)^2 \cdot \sin(x^2)}}.$$

На рассматриваемом интервале производная $f'(x)$ не определена только при $x = 0$ и $x = 1$, поэтому при всех $x \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \setminus \{0; 1\}$ производная существует и её значение вычисляется по полученной формуле. Вопрос о существовании и значении производной в точках $x = 0$ и $x = 1$ решается вычислением производной исходя из определения производной в точке:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{(1-x)^2 \cdot \sin(x^2)}}{x} = 0,$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{(1-x)^2 \cdot \sin(x^2)}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|\sqrt{\sin 1}}{x - 1}.$$

Последний предел, а вместе с ним и производная в точке $x = 1$, очевидно, не существуют. Итак, функция не дифференцируема при $x = 1$ и имеет равную нулю производную в точке $x = 0$. $\square$

2.2 Понятие дифференциала функции. Дифференцируемость в точке и на множестве. Связь между дифференциалом и производной

Понятие производной функции тесно связано с понятием дифференциала. Сформулируем определение дифференциала (по Лагранжу). Пусть приращению Δx аргумента x в точке x_0 соответствует приращение функции $\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Пусть, кроме того, это приращение $\Delta y(x_0)$ при любом достаточно малом Δx представимо в виде

$$\Delta y(x_0) = A(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $A(x_0)$ – некоторое число, не зависящее от Δx , и $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Так как второй член $\alpha(\Delta x)\Delta x$ в этой сумме является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем Δx , то последнее равенство может быть переписано в эквивалентном виде:

$$\Delta y(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Тогда выражение $A(x_0)\Delta x$, т. е. главную, линейную относительно Δx , часть приращения функции, принято называть *первым дифференциалом* функции $f(x)$ (или дифференциалом первого порядка) в точке x_0 , соответствующим приращению Δx , и обозначать

$$dy(x_0) = A(x_0)\Delta x.$$

При этом функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке x_0* , а процесс вычисления производной (дифференциала) — *дифференцированием*.

По определению, функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на интервале (a, b)* , если она дифференцируема в каждой точке этого интервала. Функция называется *непрерывно дифференцируемой на интервале (a, b)* , если её производная $f'(x)$ непрерывна на этом интервале (обозначение: $f \in C^1(a, b)$).

В частности, для функции $y \equiv x$, $x \in \mathbb{R}$, в любой точке $x = x_0$ получаем $\Delta y = \Delta x$ и, следовательно, $dx = \Delta x$. Таким образом, дифференциал dx , взятый по независимой переменной x (т. е. отвечающий приращению Δx этой переменной), всегда совпадает с её приращением и, следовательно, выражение для дифференциала можно переписать в виде

$$dy(x_0) = A(x_0)dx.$$

Дифференциал можно рассматривать также как функцию двух независимых переменных, поскольку он зависит от аргумента x_0 и приращения Δx . При этом приращение Δx в определении дифференциала считается произвольным,

но достаточно малым, так что существование дифференциала (производной) в точке – локальное свойство функции.

Пример 16. Найти, используя определение, дифференциал функции

$$f(x) = x^2 + 3x - 1$$

а) в произвольной точке x_0 ; б) в точке $x_0 = 1$.

Решение. Выпишем для этого приращение функции, отвечающее малому приращению аргумента Δx :

$$\begin{aligned} \Delta y(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) - 1 - (x_0^2 + 3x_0 - 1) = \\ &= (2x_0 + 3)\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x_0 + 3)\Delta x + o(\Delta x). \end{aligned}$$

Выделяя теперь линейную по Δx часть приращения функции, находим $dy(x_0) = (2x_0 + 3)\Delta x$, или $dy(x_0) = (2x_0 + 3)dx$. В частности, в точке $x_0 = 1$ дифференциал равен $dy(1) = 5dx$. $\square$

Остаётся вопрос: что такое $A(x_0)$ в общем случае и как найти эту величину? Следующая теорема показывает, что между существованием у функции $f(x)$ дифференциала в точке x_0 и существованием у неё в этой точке производной $f'(x_0)$ имеется непосредственная связь, при этом $A(x_0) = f'(x_0)$.

Теорема 1 (*о связи между дифференциалом и производной*). Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную¹ тогда и только тогда, когда у неё в этой точке существует первый дифференциал, причём справедливы соотношения²

$$dy = f'(x_0)dx, \quad f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом, для функции одной переменной понятия дифференцируемости функции в точке x_0 и существования конечной производной в точке x_0 эквивалентны.

Замечание 1. Дифференциал функции в точке x_0 пропорционален приращению аргумента в этой точке, а коэффициент пропорциональности равен значению производной $f'(x_0)$ в этой точке.

Замечание 2. Заметим, что если x является функцией $x(t)$ переменной t , то определение дифференциала

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{1}$$

¹по независимой переменной x .

²Здесь первое равенство – известная формула для нахождения первого дифференциала в случае, когда x – независимая переменная. Ниже будет показано, что такой же вид имеет первый дифференциал сложной функции $f(x(t))$ в случае, когда $x(t)$ – дифференцируемая функция. Второе равенство означает, что производную функции можно воспринимать алгебраически как отношение дифференциалов функции и аргумента.

отличается от формулы

$$dy = f'(x)dx, \quad (2)$$

поскольку в общем случае приращение функции Δx , очевидно, не равно её дифференциалу dx (даже если он существует).

Пример 17. Например, если $y = f(x)$, где $x = \ln(t)$, то

$$\Delta x = \ln(t + \Delta t) - \ln(t) = \ln\left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right), \quad dx = \frac{\Delta t}{t},$$

и тогда формула (1) имеет вид $dy = f'(\ln(t)) \cdot \ln(1 + \frac{\Delta t}{t})$, а формула (2) имеет вид $dy = f'(\ln(t)) \cdot \frac{\Delta t}{t}$. При фиксированном t и стремлении Δt к нулю эти дифференциалы – эквивалентные бесконечно малые, но они не равны, т. е. (1) не совпадает с (2). $\square$

Отметим, что дифференциал (1) отличается от дифференциала (2) также тем, что существует для более широкого класса функций $x(t)$. Так, в (1) функция $x(t)$ может быть непрерывной, но не дифференцируемой, а в (2) такое невозможно, так как тогда не существует dx . Например, для кусочно гладкой функции $x(t)$ в точке t её излома можно выписать приращение Δx , порождённое числами t и Δt , но при этом dx не существует.

2.3 Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная и нормаль. Приближение функции в окрестности точки дифференциалом

Физический смысл производной $f'(x)$ в точке x_0 состоит в том, что она характеризует мгновенную скорость изменения функции $f(x)$ в этой точке (вдоль оси Ox).¹

Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная и нормаль. Наличие у функции $y = f(x)$ производной (дифференциала) в точке x_0 означает, что в точке с этой абсциссой график функции имеет касательную, причём в окрестности точки касательная служит линейным приближением к графику функции. Более того, касательная к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ существует тогда и только тогда, когда функция имеет в этой точке производную. Бесконечной производной соответствует вертикальная касательная.

¹Если при этом $f'(x_0) > 0$, то функция возрастает в точке x_0 , а если $f'(x_0) < 0$, то убывает. В случае $f'(x_0) = 0$, как мы узнаем позже, определённости меньше и требуются дополнительные исследования, чтобы выяснить, будет ли в этой точке функция убывать, возрастать или иметь локальный экстремум.

Уравнение (наклонной) касательной¹ к графику $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

причём линейная относительно приращения $x - x_0$ аргумента функция $f'(x_0)(x - x_0)$ в правой части уравнения есть дифференциал $df(x_0)$. Касательная является лучшим линейным приближением графика функции в окрестности точки касания (и вовсе не обязана иметь с ним единственную общую точку, как это бывает в случае с выпуклыми функциями).

Замечание. Обозначив $y_0 = f(x_0)$, можно переписать уравнение касательной в виде

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0),$$

откуда становится ясно, почему тангенс угла φ наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс ($0 \leq \varphi < \pi$) численно равен угловому коэффициенту касательной в точке $(x_0, f(x_0))$, т. е. равен производной в этой точке: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$. При этом положительной производной с точки x_0 соответствует положительный угол наклона касательной, а отрицательной производной, соответственно, – отрицательный угол наклона касательной.

С учётом условия перпендикулярности прямых на плоскости, получаем уравнение *нормали* в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

(если $f'(x_0) = 0$, то уравнение нормали имеет вид $x = x_0$).

Если геометрически приращение Δy функции в точке x_0 можно интерпретировать как приращение (вообще говоря, нелинейное) ординаты точки на графике функции при изменении её абсциссы на Δx (на Рис. 1 это величина отрезка BC с учётом знака), то дифференциал df функции в точке x_0 – это линейное приращение ординаты касательной к графику функции в данной точке при изменении абсциссы на dx (на Рис. 1 это величина отрезка CD).

Итак, функция дифференцируема в точке, если её приращение в этой точке как функция приращения аргумента является линейной с точности до поправки, бесконечно малой при $\Delta x \rightarrow 0$ в сравнении с приращением аргумента. А дифференциал функции при этом доставляет наилучшую линейную аппроксимацию приращения функции в окрестности рассматриваемой точки.

¹Пусть $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ – точки на графике функции. Если существует предельное положение секущей M_0M при $\Delta x \rightarrow 0$, то оно называется *касательной* к графику функции в точке M_0 . При этом *нормалью* называют прямую, перпендикулярную касательной в точке касания.

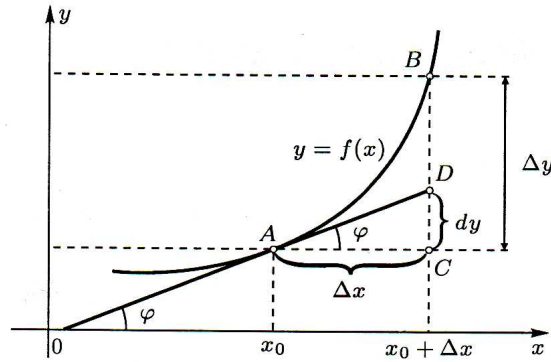


Рис. 1: Приращение Δy и дифференциал df в точке x_0 .

Пример 18. Найти уравнения касательных и нормалей к кривой $y = x2^{-x}$ в точках с абсциссами: а) $x = 0$; б) $x = -1$.

Решение. Имеем $y(0) = 0$, $y(-1) = -2$, $y'(x) = 2^{-x}(1 - x \ln 2)$, $y'(0) = 1$, $y'(-1) = 2(1 + \ln 2)$. Следовательно, уравнения касательных будут иметь вид:

$$\text{а) } y = x, \quad \text{б) } y = -2 + 2(1 + \ln 2)(x + 1),$$

а уравнения нормалей, соответственно:

$$\text{а) } y = -x, \quad \text{б) } y = -2 - \frac{1}{2(1 + \ln 2)}(x + 1). \quad \square$$

Приближение функции в окрестности точки дифференциалом.

Знание дифференциала в точке позволяет в случае необходимости приближённо вычислить значение функции в небольшой окрестности этой точки. В самом деле, рассмотрим приближённое равенство $\Delta y \approx dy$. Его геометрический смысл состоит в том, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 , как следует из определения дифференциала

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + (f'(x_0) + \alpha)\Delta x,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая в этой окрестности функция, сколь угодно близко приближается к графику касательной

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Для приближённого вычисления значения функции f в точке $x_0 + \Delta x$ бесконечно малую функцию $\alpha\Delta x$ можно отбросить:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + df(x_0).$$

Получили, что приближенное значение функции вблизи точки x_0 равно сумме её значения в этой точке и дифференциала в этой же точке (формула линей-

ризации). Получающаяся при такой аппроксимации погрешность оказывается бесконечно малой более высокого порядка, чем приращение аргумента.

Пример 19. Вычислить приближенно значение $\sqrt[3]{8,24}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$, в качестве x_0 возьмём 8, в качестве приращения $\Delta x = 0,24$. Найдём в точке $x_0 = 8$ значение функции $f(8) = 2$, её производную

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(8) = \frac{1}{12}$$

а также дифференциал $df(8) = f'(8)\Delta x = \frac{1}{12} \cdot 0,24 = 0,02$. Тогда по формуле линеаризации окончательно получим искомое приближение:

$$\sqrt[3]{8,24} \approx 2 + 0,02 = 2,02. \square$$

2.4 Связь дифференцируемости и непрерывности

«Математика учит точности мысли, подчинению логике доказательства, понятию строго обоснованной истины, а всё это формирует личность, пожалуй, больше, чем музыка».

А.Д. Александров (1912–1998) – советский и российский математик, физик, философ; альпинист. Академик АН СССР и РАН.

Рассмотрим необходимое условие дифференцируемости.

Теорема 2 (*непрерывность как необходимое условие дифференцируемости*). Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную (дифференцируема) в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 20. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = 0$. $\square$

Следствие. Разрывная в точке x_0 функция не может иметь производную в этой точке.

Пример 21. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ в точке $x_0 = 0$ не имеет производной, так как разрывна в этой точке. $\square$

Итак, для того чтобы функция имела производную в точке x_0 , необходимо (но не достаточно), чтобы она была непрерывна в этой точке.

Пример 22. Существуют непрерывные функции, нигде не имеющие производной. Например, *функция Вейерштрасса*, определяемая аналитическим выражением

$$v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

где a – произвольное нечётное число, не равное единице, а b – положительное число, меньшее единицы. Эта функция $v(x)$ определена и непрерывна при всех действительных x . Тем не менее, она не имеет производной, что было доказано, по крайней мере, при $ab > \frac{3}{2}\pi + 1$. $\square$

Гладкие и кусочно гладкие функции. Производная непрерывной функции не обязательно непрерывна. Функция $f(x)$ называется *гладкой* на сегменте $[a, b]$, если она имеет непрерывную производную на этом сегменте. То есть функция f *гладкая* на $[a, b]$, если она непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет на интервале (a, b) непрерывную производную $f'(x)$, причём существуют конечные пределы $f'(a+0) = A$ и $f'(b-0) = B$.

Функция f называется *кусочно гладкой* на сегменте $[a, b]$, если этот сегмент может быть разделён конечным числом точек

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad (1)$$

так, что f непрерывна вместе с производной f' на каждом частичном интервале (x_j, x_{j+1}) , $j = 0, 1, \dots, n-1$, и при этом существуют конечные пределы

$$f(x_j + 0), \quad f(x_{j+1} - 0), \quad f'(x_j + 0), \quad f'(x_{j+1} - 0).$$

Иными словами, функцию относят к *кусочно гладким* на $[a, b]$, если она и её производная допускают на этом сегменте конечное число точек разрыва (первого рода).

Пример 23. Функция $y = [x]$ (целая часть x), очевидно, является кусочно гладкой на любом сегменте. $\square$

Пример 24. Функции $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt[3]{|x|}$ не являются кусочно гладкими на сегменте $[-1, 1]$, так как имеют в точке $x = 0$ бесконечные производные, во всяком случае, правые и левые. $\square$

Важным частным случаем кусочно гладкой функции является *непрерывная кусочно гладкая* на сегменте $[a, b]$ функция f . Она характеризуется тем, что для неё выполняются следующие условия:

- 1) f непрерывна на $[a, b]$;
- 2) существует разбиение (1) отрезка $[a, b]$ конечным числом точек такое, что f является гладкой функцией на каждом из частичных сегментов $[x_j, x_{j+1}]$.

Пример 25. Примером непрерывной кусочно гладкой функции является функция $y = |x|$, $x \in [-1, 1]$. $\square$

2.5 Односторонние производные. Необходимое и достаточное условие существования производной в точке

Односторонние производные. По аналогии с понятием непрерывности функции в точке слева и справа, введём понятие левой и правой производных. Так, *левая производная* (производная в точке x_0 слева) определяется как левый предел

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

а *правая производная*, соответственно, как правый предел

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на сегменте* $[a, b]$, если:

- 1) она дифференцируема в каждой внутренней точке этого сегмента;
- 2) $f(x)$ имеет в точке a конечную правую производную $f'_+(a)$ и в точке b — конечную левую производную $f'_-(b)$.

Теорема 3 (*необходимое и достаточное условие существования производной в точке*). Непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда у неё в этой точке существуют обе односторонние производные и они равны:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) (= f'(x_0)).$$

Пример 26. Функция

$$y(x) = x|x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

дифференцируема в точке $x_0 = 0$, поскольку

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = 0 \quad \text{и} \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0. \quad \square$$

Пример 27. Исследовать функцию $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ на дифференцируемость в точке $x = 0$.

Решение. Вычислим, используя определение, односторонние производные:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x}.$$

Т. к. $e^{-x^2} \sim 1 - x^2$, то $1 - e^{-x^2} \sim x^2$, поэтому $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = -1$. Далее,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x} = 1.$$

Поскольку $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, то в точке $x = 0$ функция не дифференцируема.

Отметим, что всякая чётная функция f либо не дифференцируема в точке $x = 0$, либо $f'(0) = 0$. $\square$

Пример 28. Исследовать функцию $f(x) = |x|$ на дифференцируемость: а) в точке $x = 0$; б) на сегменте $[0, 1]$.

Решение. а) Поскольку $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x-0}{x-0} = -1$, а $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x-0}{x-0} = 1$, то функция не дифференцируема в точке $x = 0$.

б) При $x \geq 0$ имеем $f(x) = x$, поэтому на интервале $(0, 1)$ функция $f(x)$ дифференцируема. Кроме того, функция дифференцируема и в точке $x = 1$, а значит, существует $f'_-(1)$. Согласно п. а) существует $f'_+(0)$. Итак, функция $f(x) = |x|$ дифференцируема на сегменте $[0, 1]$. $\square$

Замечание 1 (о том, когда $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$). Говоря о нахождении односторонних производных, на практике удобно пользоваться следующим свойством: если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, производная $f'(x)$ существует в некоторой правой (левой) полуокрестности x_0 и существует $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$ (соответственно, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x)$), то этот предел равен $f'_+(x_0)$ (соответственно, $f'_-(x_0)$).

Замечание 2. Если $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty$, то $f'(x_0) = \infty$.

Пример 29. Найти производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \arctg x, & \text{если } x \geq 0, \\ x^2 + x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Является ли функция непрерывно дифференцируемой в точке $x = 0$?

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ при $x > 0$, $f'(x) = 2x+1$ при $x < 0$. Кроме того, в точке $x = 0$ существуют пределы производной слева и справа, поэтому $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+x^2} = 1$, $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} (2x+1) = 1$. Итак, функция $f(x)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, причём её производная равна

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \\ 2x+1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Заметим, что производная непрерывна в точке $x = 0$. $\square$

Пример 30. Пусть дана функция

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + ax + b, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Найти такие значения параметров a и b , при которых данная функция дифференцируема в точке $x = 0$.

Решение. Поскольку $f(x)$ должна быть непрерывной в точке $x = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0), \quad \text{т. е. } 0^2 + a \cdot 0 + b = e^0,$$

откуда $b = 1$. Для дифференцируемости в точке $x = 0$ должно выполняться условие $f'_-(0) = f'_+(0)$. С учётом замечания выше, имеем $f'_+(0) = (x^2 + ax + b)' \Big|_{x=0} = a$, $f'_-(0) = (e^x)' \Big|_{x=0} = 1$. Следовательно, $f'(0)$ существует, только если $a = 1$ и $b = 1$. $\square$

Обратите внимание: условие непрерывности функции $f(x)$ в замечании 1 выше существенно, что показывает следующий пример.

Пример 31. [5, Пример 5.15] Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Поскольку $-\frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) < f(0) < \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, то функция $f(x)$ в точке $x = 0$ не является непрерывной ни справа, ни слева, следовательно, $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$ не существуют. В то же время при $x \neq 0$ имеем $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, причём существуют оба предела $\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = -1$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = -1$. $\square$

Замечание 3. Если кривая L на плоскости Oxy является графиком непрерывной функции $y = f(x)$, то дифференцируемость f в точке x_0 эквивалентна существованию у кривой L невертикальной касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, а уравнение $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ является уравнением этой касательной. Если функция f непрерывна в точке x_0 и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ (или $-\infty$), то в точке $M_0(x_0, y_0)$ график этой функции имеет вертикальную касательную $x = x_0$.

Опираясь на понятие односторонних производных, можно ввести понятие полукасательной к кривой в заданной точке [5]. Так, если в точке x_0 непрерывная функция f не дифференцируема, однако существуют $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, то график этой функции имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ *односторонние полукасательные*: левую в виде полупрямой $y - y_0 = f'_-(x_0)(x - x_0)$, $x \leq x_0$, и правую в виде полупрямой $y - y_0 = f'_+(x_0)(x - x_0)$, $x \geq x_0$. При этом точка M_0 называется *точкой излома*, или *угловой точкой* кривой. Точка кривой, в которой односторонние полукасательные совпадают, называется *точкой возврата*.

Аналогично вводятся полукасательные при параметрическом задании кривой.¹

¹Пусть $(x(t), y(t))$ – некоторая параметризация плоской кривой L (см. понятие парамет-

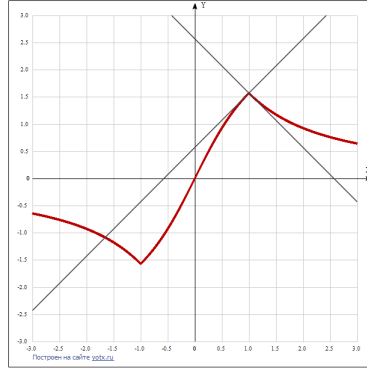


Рис. 2: Полукасательные к графику функции $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

Пример 32. [5, Пример 5.36] Найти угол между левой и правой полукасательными в угловых точках кривой $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

Решение. Найдём производную функции:

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{2x}{1+x^2})^2}} \cdot \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2 \cdot (1+x^2)}} \quad (|x| \neq 1).$$

Следовательно, только точки $M_1(1, \frac{\pi}{2})$ и $M_2(-1, -\frac{\pi}{2})$ могут быть угловыми (Рис. 2). Имеем

$$y'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} y'(x) = -1, \quad y'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} y'(x) = 1.$$

Получили, что угловые коэффициенты левой и правой полукасательных в точке M_1 равны 1 и -1 , угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$. Поскольку функция $y(x)$ нечётная, то кривая симметрична относительно начала координат и угол между левой и правой полукасательными в точке M_2 также равен $\frac{\pi}{2}$. $\square$

рически заданной кривой далее в материалах соответствующего семинара). Если в некоторой точке t_0 функции $x(t), y(t)$ имеют правые производные $x'_+(t_0), y'_+(t_0)$, хотя бы одна из которых отлична от нуля, то задаваемая параметрическими уравнениями полупрямая

$$x = x(t_0) + x'_+(t_0)(t - t_0), \quad y = y(t_0) + y'_+(t_0)(t - t_0), \quad t \geq t_0,$$

называется *полукасательной* к кривой L в точке $M_0(x(t_0), y(t_0))$. Если же в точке t_0 функции $x(t), y(t)$ имеют производные $x'(t_0), y'(t_0)$, хотя бы одна из которых отлична от нуля, то в точке M_0 существуют полукасательные к L как с одной, так и с другой стороны, а угол между ними равен π , т. е. эти две полупрямые сливаются в одну прямую. И эта прямая является касательной к кривой L в точке M_0 .

2.6 Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций

«Математик – это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями. Лучший математик – кто устанавливает аналогии доказательств. Более сильный может заметить аналогии теорий.

Но есть и такие, кто между аналогиями видит аналогии».

Стефан Банах (1892–1945) – польский математик, один из создателей современного функционального анализа.

Эти вопросы мы уже рассматривали ранее, когда учились технике дифференцирования, поэтому напомним основное.

Теорема 4 (об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями). Если функции $u(x), v(x)$ дифференцируемы в точке x_0 , то в этой точке будут дифференцируемы их сумма, разность, произведение и частное (последнее при условии $v(x_0) \neq 0$), причём их первые производные и дифференциалы удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned}(u \pm v)' &= u' \pm v', & d(u \pm v) &= du \pm dv; \\ (uv)' &= u'v + v'u, & d(uv) &= vdu + u dv; \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - v'u}{v^2}, & d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{vdu - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0).\end{aligned}$$

Следствие. Производная и дифференциал произведения n функций:

$$\begin{aligned}(u_1 u_2 \dots u_n)' &= u_1' u_2 \dots u_n + u_1 u_2' \dots u_n + \dots + u_1 u_2 \dots u_n', \\ d(u_1 u_2 \dots u_n) &= d(u_1) u_2 \dots u_n + u_1 d(u_2) \dots u_n + \dots + u_1 u_2 \dots d(u_n).\end{aligned}$$

2.7 Производная и дифференциал сложной функции. Почленное дифференцирование равенств

Выше мы рассмотрели случай независимой переменной x . Пусть теперь $x = x(t)$ – функция (независимой) переменной t , или зависимая переменная.

Теорема 5 (производная и дифференциал сложной функции). Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0 , а функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $y = f(x(t))$ дифференцируема в точке t_0 , причём

$$(f(\varphi(t)))' \Big|_{t=t_0} = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0),$$

$$df(x(t)) \Big|_{t=t_0} = f'(x_0) dx(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0) dt = (f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0)) dt = (f(\varphi(t)))' \Big|_{t=t_0} dt.$$

Это свойство иногда называют *свойством инвариантности первого дифференциала* сложной функции (относительно замены аргумента). Суть его состоит в том, что первый дифференциал имеет один и тот же вид произведения первой производной и дифференциала переменной ($dy = f'(x_0)dx$) независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией некоторого аргумента t .

Теорема 6 (о почленном дифференцировании тождественных равенств). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на множестве X и $\forall x \in X$ $f(x) \equiv g(x)$, то $f'(x) \equiv g'(x)$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 33. Например, функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^2 + 1$ не являются тождественно равными на множестве $\mathbb{R}$ (более того, их значения не совпадают ни в одной точке), в то же время их производные при всех x равны: $f'(x) = 2x = g'(x)$. $\square$

2.8 О характере точек разрыва производной. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной. О производных периодической и чётной функций

«Математика — это больше чем наука, это язык науки».

Нильс Бор (1885–1962), датский физик–теоретик, один из создателей современной физики. Лауреат Нобелевской премии по физике.

Теорема 7 (о характере точек разрыва производной). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда её производная $f'(x)$ не может иметь на этом интервале ни устранимых разрывов, ни разрывов 1-го рода (только разрывы 2-го рода).

Пример 34. Функция $f(x) = x$ при $x \neq 0$, и $f(0) = 1$, не может являться на интервале $(-1, 1)$ производной ни для какой функции, так как в точке $x = 0$ эта функция терпит устранимый разрыв, что невозможно для производной. $\square$

Пример 35. Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на интервале $(-1, 1)$ не может служить производной ни для какой функции, так как в точке $x = 0$ сигнум терпит разрыв 1-го рода (скачок), что противоречит теореме 7. $\square$

Теорема 8 (Дарбу, о промежуточных значениях производной). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$. Тогда каково бы ни было число C , заключённое между $A = f'_+(a)$ и $B = f'_-(b)$ на этом сегменте найдётся такая точка ξ , что $f'(\xi) = C$.

Пример 36. Функция Дирихле не может являться на интервале $(-1, 1)$ производной ни для какой функции, так как функция Дирихле не принимает промежуточные значения между 0 и 1, что, в силу теоремы Дарбу, невозможно для производной. $\square$

Теорема 9 (*о производной периодической функции*).¹ Производная периодической функции есть периодическая функция с тем же периодом T .

Пример 37. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ имеет на своей области определения производную $f'(x) = 1/\cos^2 x$, которая периодична с тем же периодом $T = \pi$. $\square$

Теорема 10 (*о производной чётной и нечётной функций*).² Производная чётной дифференцируемой функции есть функция нечётная, а производная нечётной функции – чётна.

Пример 38. Чётная функция $f(x) = \cos 4x$ имеет на всей числовой прямой производную $f'(x) = -4 \sin 4x$, которая является нечётной функцией. $\square$

«Культура — это не количество прочитанных книг, а количество понятий».

*Фазиль Искандер (1929–2016), русский прозаик,
журналист, поэт и сценарист, общественный
деятель.*

¹Функция $f(x)$, $x \in X$, называется *периодической*, если существует такое действительное число $T \neq 0$ (называемое *периодом*), что: 1) для всех $x \in X$ числа $x \pm T$ также принадлежат X ; 2) $\forall x \in X$ выполняется условие периодичности $f(x + T) = f(x)$. Наименьший положительный период T называется *главным (основным) периодом* функции.

²Функция $f(x)$, $x \in X$, называется *чётной* (соответственно, *нечётной*), если $\forall x \in X$ выполняется $f(-x) \equiv f(x)$ (соответственно, $f(-x) \equiv -f(x)$).

2.9 Задачи для самостоятельного решения

№72. Вычислить производную функции $y = 3x^2 - 2x$ в точке $x = x_0$, используя определение производной.

№73. На кривой $y = x^2 - 2x + 5$ найти такую точку, в которой ордината возрастает в четыре раза быстрее чем абсцисса.

№74. [7, № 1083] Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ определить: 1) приращение $\Delta f(1)$ функции в точке $x = 1$; 2) первый дифференциал $df(1)$ функции в этой точке.

№75. Верно ли, что если $f(x) = 2x - 4 + o(x - 3)$ при $x \rightarrow 3$ и $f(3) = 2$, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 3$?

№76. Верно ли, что если $f(x) = 2x - 1 + o(1)$ при $x \rightarrow 4$ и $f(4) = 7$, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 4$?

Найти дифференциал dy функции в произвольной точке x :

№77. $y = \sin^2 x + 5x^3 - 2x$;

№78. $y = 2^x \cos x$;

№79. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

№80. $y = (u(x) - 2) \cdot \ln(1 + v(x))$, где $u(x), v(x)$ – дифференцируемые функции независимой переменной x ;

№81. $y = f(u)$, где $u(x) = e^{4x} \cdot \cos 2x$, $f(u)$ – дифференцируемая функция.

№82. [7, № 1096(а,б)] Упростить отношения дифференциалов

$$\text{а) } \frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)}; \quad \text{б) } \frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right).$$

№83. Вычислить приближённо с помощью дифференциала значение функции $y = \sqrt{x^2 + 5}$ в точке $x = 1,97$.

№84. Вычислить приближённо $\sin 46^\circ$.

Исследование функций на дифференцируемость и задачи на свойства дифференцируемых функций:

№85. Пусть в некоторой точке x существует $f'(x)$. Обязательно ли существует

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} ?$$

№86. Следует ли дифференцируемость функции f в точке x из существования конечного предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} ?$$

№87. Следует ли дифференцируемость функции f в точке x из существования конечного предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} ?$$

№88. Используя определение, найти производную функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos\left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

в точке $x = 0$.

№89. Является ли функция

$$f(x) = x\sqrt{(1-x)^2 \sin(x^2)}, \quad x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

дифференцируемой в точке $x = 0$?

№90. Исследовать на непрерывность и дифференцируемость в точке $x = 1$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \ln x \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \cos \frac{1}{x-1}, & \text{если } x \neq 1, \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

№91. Является ли функция

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}, & \text{если } x \neq 1, \\ 0, & \text{если } x = 1, \end{cases}$$

дифференцируемой в точке $x = 1$?

№92. Является ли функция

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^2 \cdot \cos \frac{1}{9x}\right) + 2x, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

дифференцируемой в точке $x = 0$?

№93. Является ли функция

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \operatorname{tg}\left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}\right)\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

дифференцируемой в точке $x = 0$?

№94. Дифференцируема ли в точке $x = 0$ функция

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x \cdot \sin \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0? \end{cases}$$

№95. Дифференцируема ли в точке $x = 0$ функция

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln(1 + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x})} - 1, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0? \end{cases}$$

№96. Исследовать на дифференцируемость в точке $x = 0$ функцию $f(x) = |x|^{|x|}$.

№97. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Чему равен предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))?$$

№98. Составить уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = 6\sqrt[3]{x} - \frac{16}{3}\sqrt[4]{x}$$

в точке с абсциссой $x = 1$.

№99. Написать уравнения касательных к кривой

$$y = x\sqrt[3]{1-x}$$

в точках с абсциссами: а) $x = 0$; б) $x = 1$.

№100. Кривая задана уравнением $y = x^2 + 5x + 3$. Определить угол между касательными к кривой в точках с абсциссами $x = -2$ и $x = 0$.

№101. Определить, под каким углом парабола $y = x^2 - x$ пересекает ось абсцисс.

№102. [7, № 833] Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема и n – натуральное число, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) = f'(x). \quad (1)$$

Обратно, если для функции $f(x)$ существует предел (1), то можно ли утверждать, что эта функция имеет производную? Рассмотреть пример функции Дирихле.

№103. Существует ли функция, определённая на $\mathbb{R}$ и дифференцируемая ровно в одной точке?

№104. Привести пример функции, определённой на всей числовой прямой и не имеющей производной в трёх точках, а также пример функции, имеющей производную только в трёх точках.

№105. Построить график производной для функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. Проверить, что производная y' является чётной функцией. Будет ли она периодической функцией?

№106. Существует ли функция, всюду непрерывная на $\mathbb{R}$, но нигде не дифференцируемая?

№107. Пусть $f(x) = |\pi^2 - x^2| \cdot \sin^2 x$. Во всех ли точках дифференцируема эта функция? Найти $f'(\pi)$ и $f'(-\pi)$ в случае утвердительного ответа.

№108. [7, № 994] Найти $f'(a)$, если $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = a$.

№109. [7, № 998] Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

имеет производную лишь при $x = 0$.

№110. [5, Пример 5.13] Найти $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, если $f(x) = x\sqrt{\ln(1+x^2)}$.

№111. [7, № 1009.1], [5, Пример 5.14] Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

непрерывна при $x = 0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производных.

№112. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

непрерывна и дифференцируема на интервале $(-1, 1)$, а её производная $f'(x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода. Является ли функция f гладкой на сегменте $[-1, 1]$?

№113. [7, № 1009.2] Пусть x_0 – точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$. Выражения

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 0)}{h}$$

и

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

называются *обобщёнными* односторонними (соответственно, левой и правой) производными функции $f(x)$ в точке x_0 .

Найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точке разрыва x_0 функции $f(x)$, если:

$$\text{а) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

№114. [7, № 1010] Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq x_0, \\ ax + b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты a и b , чтобы функция $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x = x_0$?

№115. Найти такие значения a и b , чтобы функция f была дифференцируемой на множестве $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \leq 1, \\ a(x+2)^2 + b, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

№116. Найти такие значения a и b , чтобы функция f была дифференцируемой на множестве $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + ax + b, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

№117. Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq x_0, \\ g(x), & \text{если } x < x_0. \end{cases}$$

Какому условию должны удовлетворять непрерывные функции f и g в точке $x = x_0$, чтобы функция φ была дифференцируемой на всей числовой прямой?

№118. При каких значениях параметра a функция f в точке $x = 0$:

а) непрерывна; б) дифференцируема; в) непрерывно дифференцируема, если

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

№119. [7, № 1014] Можно ли утверждать, что сумма $F(x) = f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если:

а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0 ? Решить задачу в общем виде. Рассмотреть примеры: 1) $f(x) = |x|$, $g(x) = 1 - |x|$ в точке $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \{x\}$, $g(x) = [x]$ при $x_0 \in \mathbb{Z}$.

№120. [7, № 1015] Можно ли утверждать, что произведение $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $g(x)$ не имеет производной в точке x_0 ; б) обе функции не имеют производной в точке x_0 ? Решить задачу в общем виде. Рассмотреть примеры: а) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

№121. [7, № 1016(а,б,в)] Что можно сказать о дифференцируемости сложной функции $F(x) = f(g(x))$ в данной точке $x = x_0$, если: а) функция $f(g)$ имеет производную в точке $g(x_0)$, а функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$; б) функция $f(g)$ не имеет производной в точке $g(x_0)$, а функция

$g(x)$ имеет производную в точке $x = x_0$; в) обе функции $f(g)$ и $g(x)$ не дифференцируемы в соответствующих точках $g(x_0)$ и x_0 . Решить задачу в общем виде. Рассмотреть примеры:

$$\text{а) } f(g) = g^2, g(x) = |x|; \quad \text{б) } f(g) = |g|, g(x) = x^2;$$

$$\text{в) } f(g) = \chi(g), g(x) = \chi(x), \text{ где } \chi(\cdot) - \text{функция Дирихле.}$$

№122. [7, № 1020] Если функция $f(x)$ имеет производную в окрестности точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty$, то обязательно ли $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$? Рассмотреть пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \rightarrow 0$.

№123. [7, № 1023] Можно ли почленно дифференцировать неравенство между функциями?

№124. Существует ли такая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f'(x) = \operatorname{sgn} x$ при всех $x \in \mathbb{R}$?

№125. [7, № 1027] Доказать, что производная чётной дифференцируемой функции есть функция нечётная, а производная нечётной дифференцируемой функции есть функция чётная.

№126. [7, № 1028] Доказать, что производная дифференцируемой периодической функции есть функция снова периодическая с тем же периодом.

№127. Известно, что непостоянная непрерывная периодическая функция имеет наименьший положительный период (основной период). Привести пример непостоянной периодической функции, не имеющей наименьшего положительного периода.

№128. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in (0, 2) \cap \mathbb{Q}, \\ 2x - 1, & \text{если } x \in (0, 2) \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

дифференцируема только при $x = 1$ и $f'(1) \neq 0$. Является ли обратная функция дифференцируемой в точке $y = 1$ ($= f(1)$)?

№129. Привести пример такой ограниченной функции $f(x)$, дифференцируемой на $(a, +\infty)$, что существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$, но не существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

№130. Привести пример функции $f(x)$, дифференцируемой на $(a, +\infty)$, у которой существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, но не существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

№131. Верно ли, что $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x)$? Рассмотреть пример (см. задачу выше) в точке $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in (0, 2) \cap \mathbb{Q}, \\ 2x - 1, & \text{если } x \in (0, 2) \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

При каком условии это равенство верно?

2.10 Ответы и решения

72. По определению производной имеем в произвольной точке $x = x_0$

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x_0 + \Delta x)^2 - 2(x_0 + \Delta x) - (3x_0^2 - 2x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x_0 - 3\Delta x - 2) = 6x_0 - 2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad (3x^2 - 2x)' = 6x - 2. \end{aligned}$$

73. Так как именно производная характеризует скорость изменения ординаты (функции) по сравнению с возрастанием абсциссы (аргумента), то условие $y'(x) = 2x - 2 = 4$ определит абсциссу искомой точки: $x = 3$, а ордината находится из уравнения $y = x^2 - 2x + 5$, т. е. $y = 8$. На кривой это будет точка $M(3, 8)$.

74. 1) Придадим в точке $x = 1$ аргументу функции f приращение Δx и найдём соответствующее приращение функции:

$$\begin{aligned} \Delta f(1) &= f(1 + \Delta x) - f(1) = ((1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) + 1) - 0 = \\ &= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $df(1) = \Delta x$ (главная часть приращения при $\Delta x \rightarrow 0$, линейная относительно Δx).

2) Выше мы нашли значение дифференциала в точке $x = 1$, действуя по определению дифференциала 1-го порядка. Можно было поступить иначе, а именно воспользоваться стандартной формулой для 1-го дифференциала:

$$df(x) = (x^3 - 2x + 1)'dx = (3x^2 - 2)dx \Big|_{x=1} = dx.$$

75. Проверим выполнение условия дифференцируемости функции в точке $x = 3$: должен существовать конечный предел

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 4 + o(x - 3) - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 3) + o(x - 3)}{x - 3} = 2.$$

Следовательно, функция дифференцируема в точке $x = 3$.

76. Проверим выполнение условия дифференцируемости функции в точке $x = 4$: должен существовать конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 1 + o(1) - 7}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x - 4) + o(1)}{x - 4} = 2 + \lim_{x \rightarrow 4} \frac{o(1)}{x - 4}.$$

Заметим, что в качестве $o(1)$ здесь может выступать любая б. м. функция.

Если, например, взять в качестве $o(1)$ функцию $(x - 4)$, то $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x - 4} = 1$, а

если функцию $(x - 4)^2$, то $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)^2}{x - 4} = 0$. Это означает, что предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{o(1)}{x - 4}$ не существует, а значит, функция $f(x)$ не дифференцируема в точке $x = 4$.

77. Имеем

$$\begin{aligned} d(\sin^2 x + 5x^3 - 2x) &= d(\sin^2 x) + d(5x^3) - d(2x) = \\ &= 2 \sin x \cos x dx + 15x^2 dx - 2dx = (\sin 2x + 15x^2 - 2)dx. \end{aligned}$$

78. Имеем

$$\begin{aligned} d(2^x \cos x) &= \cos x d(2^x) + 2^x d(\cos x) = \\ &= \cos x 2^x \ln 2 dx + 2^x (-\sin x) dx = (\cos x \ln 2 - \sin x) 2^x dx. \end{aligned}$$

79. Имеем

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) &= \frac{\sqrt{x} \cdot d(\ln x) - \ln x \cdot d(\sqrt{x})}{x} = \\ &= \frac{\sqrt{x} \left(\frac{1}{x} dx\right) - \ln x \left(d\frac{1}{2\sqrt{x}} dx\right)}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} dx, \quad x > 0. \end{aligned}$$

80. Имеем $dy = y' dx = \left(u' \cdot \ln(1+v) + (u-2) \cdot \frac{v'}{1+v}\right) dx$.

81. По формуле для первого дифференциала имеем: $dy = f'(u)du$, где $du = u'(x)dx = (4e^{4x} \cos 2x + e^{4x}(-2 \sin 2x))dx = 2e^{4x}(2 \cos 2x - \sin 2x)dx$. Подставляя, окончательно получаем $dy = f'(u) \cdot 2e^{4x}(2 \cos 2x - \sin 2x)dx$.

82. а) Имеем

$$\frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)} = \frac{(x^3 - 2x^6 - x^9)' dx}{(x^3)' dx} = \frac{(3x^2 - 12x^5 - 9x^8) dx}{3x^2 dx} = 1 - 4x^3 - 3x^6.$$

$$\text{б) } \frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{d(x^2)} = \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx}{2x dx} = \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3}.$$

83. Ближайшая к 1,97 точка, в которой легко вычислить значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$, — это точка $x_0 = 2$. Если приращение $\Delta x = x - x_0$ аргумента x мало по абсолютной величине, то

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Вычислим $\Delta x = x - x_0 = 1,97 - 2 = -0,03$, $f(x_0) = f(2) = 3$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \Big|_{x=2} = \frac{2}{3}$. Тогда по формуле выше получаем

$$f(1,97) \approx 3 + \frac{2}{3} \cdot (-0,03) = 2,98.$$

84. В формуле $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ возьмём $f(x) = \sin x$, $x_0 = 45^\circ$, $\Delta x = 1^\circ$:

$$\sin(45^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,7194.$$

85. Да, поскольку

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{-h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = \\ &= f'(x) + f'(x) = 2f'(x).\end{aligned}$$

86. Нет, например, $f(x) = \operatorname{sgn}^2 x$, $x = 0$.

87. Нет, например, $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x = 0$.

88. По определению производной имеем

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(x \sin \frac{1}{x}\right) - 0}{x} =$$

(по формуле понижения степени $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{1}{2} x \cdot \sin \frac{1}{x}\right)}{x} =$$

(т. к. при $x \rightarrow 0$ имеем $\frac{1}{2} x \cdot \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$, и $\sin \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{1}{2} x \cdot \sin \frac{1}{x}\right)^2}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin^2 \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Так как предел существует и равен нулю, то $f'(0) = 0$.

89. Вычислим производную по определению:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{(1-x)^2 \sin(x^2)} - 0}{x} = 0.$$

Так как производная существует и конечна, то функция дифференцируема в этой точке.

90. 1) Непрерывность: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln x \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \cos \frac{1}{x-1} \right) = 0 = f(1)$, следовательно, функция непрерывна в данной точке.

2) Дифференцируемость ($\ln x \sim x - 1$ при $x \rightarrow 1$):

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \cos \frac{1}{x-1} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \cos \frac{1}{x-1} - 0}{x - 1} = 0.$$

Так как производная существует и конечна, то функция дифференцируема в точке.

91. Найдём односторонние производные по определению:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} - 0}{x - 1} = -\frac{\pi}{2},$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} - 0}{x-1} = \frac{\pi}{2},$$

Так как они не равны, то функция не дифференцируема в точке.

92. Вычислим (по определению) производную в точке $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \left(x^2 \cdot \cos \frac{1}{9x} \right) + 2x - 0}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} \left(x^2 \cdot \cos \frac{1}{9x} \right)}{x} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos \frac{1}{9x}}{x} + 2 = 2. \end{aligned}$$

Так как производная существует и конечна, то функция дифференцируема в этой точке.

93. Вычислим (по определению) производную в точке $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 - \operatorname{tg} \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right) \right) - 0}{x} =$$

(так как $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right)}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Так как производная существует и конечна, то функция дифференцируема в этой точке.

94. Вычислим (по определению) производную в точке $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \left(x \cdot \sin \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) - 0}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \left(x \cdot \sin \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{3}{\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

Так как последний предел не существует, то функция не дифференцируема в данной точке.

95. Вычислим (по определению) производную в точке $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \ln \left(1 + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right)} - 1 - 0}{x} =$$

(умножим и разделим на сопряжённое выражение)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{1 + \ln \left(1 + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right)} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \ln \left(1 + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right)} + 1} = 0$$

(числитель стремится к нулю, а знаменатель к 2). Так как производная существует и конечна, то функция дифференцируема в данной точке.

96. Воспользуемся известным фактом, что $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$, а также чётностью функции (её производная – нечётная функция) и вычислим правую производную в точке $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot \ln x =$$

$$\begin{aligned} \text{(т. к. } x \ln x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +0, \text{ то воспользуемся } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1) \\ = \lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, функция не дифференцируема в этой точке.

97. Из дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0 следует её непрерывность в этой точке, т. е. равенство

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0.$$

98. 1) Найдём уравнение касательной. Так как $f(1) = \frac{2}{3}$, $y' = \left(6\sqrt[3]{x} - \frac{16}{3}\sqrt[4]{x}\right)' = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{3\sqrt[4]{x^3}}\right)\Big|_{x=1} = \frac{2}{3}$, то получаем

$$y = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(x - 1) \Leftrightarrow 2x - 3y = 0.$$

2) Найдём уравнение нормали:

$$y = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}(x - 1) \Leftrightarrow 9x + 6y - 13 = 0.$$

99. Имеем $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y'(x) = \frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}(3-4x)$, $x \neq 1$. Следовательно, $y'(0) = 1$, поэтому уравнение касательной в случае а) имеет вид $y = x$. При $x = 1$ формулой выше для вычисления производной пользоваться нельзя, поэтому найдём производную по определению:

$$y'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y(x) - y(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{-\sqrt[3]{(1-x)^2}} = -\infty.$$

Таким образом, в точке $(1, 0)$ кривая имеет вертикальную касательную $x = 1$.

100. Для решения задачи достаточно знать угловые коэффициенты k_1 , k_2 касательных. Т. к. $y' = 2x + 5$, то $k_1 = y'(-2) = 1$, $k_2 = y'(0) = 5$ и (меньший) угол между касательными прямыми находим по формуле

$$\varphi = \arctg \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = \arctg \left| \frac{5 - 1}{1 + 1 \cdot 5} \right| = \arctg \frac{2}{3}.$$

101. Под углом φ между кривой и осью Ox понимается угол, который касательная к кривой в соответствующей точке образует с осью абсцисс ($\varphi \in [0, \pi)$). Для решения задачи достаточно знать угловые коэффициенты касательных в этих точках. Находим абсциссы точек пересечения заданной кривой с осью Ox , решив систему уравнений $y = x^2 - x$, $y = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$. Т. к. $y' = 2x - 1$, то угловые коэффициенты касательных в точках $x = 0$ и $x = 1$ равны, соответственно, $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 = y'(0) = -1$ и $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 = y'(1) = 1$, поэтому искомые углы равны $\varphi_1 = \frac{3\pi}{4}$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ соответственно.

102. По определению производной существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

при произвольном стремлении Δx к 0. Пусть $\Delta x = \frac{1}{n}$. Тогда равенство (1) доказано.

Обратное, вообще говоря, неверно, и при других способах стремления Δx к 0 предел может не существовать. Рассмотрим функцию Дирихле:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Поскольку $\frac{1}{n}$ – рациональное число, то $n(\chi(x + \frac{1}{n}) - \chi(x)) = 0$ при любом x и n . Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\chi(x + \frac{1}{n}) - \chi(x)) = 0$. В действительности функция $\chi(x)$ не имеет производной. В самом деле, пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность иррациональных чисел, которая при $n \rightarrow \infty$ стремится к $+\infty$. Пусть, далее, x – рациональное число. Тогда $x + \frac{1}{\xi_n}$ – иррациональное число и, по определению функции Дирихле, имеем $\chi(x + \frac{1}{\xi_n}) - \chi(x) = -1$, а предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n(\chi(x + \frac{1}{\xi_n}) - \chi(x)) = -\infty$. Так как результат зависит от способа стремления Δx к нулю, то приходим к выводу, что обратное утверждение неверно.

Можно было обосновать недифференцируемость иначе, сославшись на то, что функция Дирихле разрывна в каждой точке, а никакая функция не может быть дифференцируема в точке разрыва.

103. Да, например, $y(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ -x^2, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ Данная функция дифференцируема только в точке $x = 0$ и $f'(0) = 0$. В самом деле, в окрестности $x = 0$ имеем: $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{\pm x^2 - 0}{x} \right| = |x|$. Переходя в этом равенстве к пределу при $x \rightarrow 0$, получим: $f'(0) = 0$. В остальных точках она разрывна и, следовательно, не дифференцируема.

104. Первый пример: $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$, $x \in \mathbb{R}$; второй пример: $y = x^2(x^2 - 1)^2 \cdot D(x)$, где $D(x)$ – функция Дирихле.

105. Так как при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x + \pi)) \equiv \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, то это периодическая функция с периодом $T = \pi$. При этом на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ функция совпадает с функцией $y = x$. График производной постройте самостоятельно.

106. Да, в качестве примера можно привести функцию Ван-дер-Вардена.

Построение. В качестве первого шага рассмотрим функцию

$$f_0(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 - x, & \text{если } x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

и продолжим её периодическим образом на всю числовую прямую. Эта функция не имеет производной в точках $x = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Далее рассмотрим функцию $f_1(x) = \frac{1}{4}f_0(4x)$ и также продолжим её периодическим образом на всю числовую прямую. Эта функция не имеет производной в точках $x = \frac{n}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ положим $f_n(x) = \frac{1}{4^n}f_0(4^n x)$, функция $f_n(x)$ непрерывна и не имеет производной в точках $x = \frac{n}{2 \cdot 4^n}$ (в остальных точках её производная равна $(+1)$ или (-1)).

Таким образом, с увеличением n точек недифференцируемости у функции $f_n(x)$ становится всё больше и располагаются они всё гуще. Сложив все построенные функции, получим функцию

$$F_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x).$$

Можно утверждать, что при любом x существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$. Действительно, функция $F_n(x) = F_{n-1}(x) + f_n(x)$, $f_n(x) \geq 0$, возрастает и ограничена, т. к. $f_0(x) \leq 1$, $f_1(x) \leq \frac{1}{4}$, ..., $f_n(x) \leq \frac{1}{4^n}$, следовательно, $F_n(x) \leq 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$. Значит, существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = f(x)$.

Это и есть функция Ван-дер-Вардена. Её также можно представить в виде функционального ряда, т. е. бесконечной суммы $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Доказательство непрерывности и недифференцируемости данной функции можно найти, например, в [16, с. 243].

107. Да; $f'(\pi) = f'(-\pi) = 0$. Решение. При $x \neq \pm\pi$ имеем

$$f(x) = \begin{cases} (\pi^2 - x^2) \sin^2 x, & \text{если } -\pi < x < \pi, \\ (x^2 - \pi^2) \sin^2 x, & \text{если } (-\infty, \pi) \cup (\pi, +\infty), \end{cases}$$

и производная вычисляется по обычным правилам дифференцирования.

Исследуем функцию на дифференцируемость в точках $x = \pm\pi$, воспользовавшись определением производной (пользоваться стандартными формулами дифференцирования в данном случае нельзя):

$$f'(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{|\pi^2 - x^2| \cdot \sin^2 x}{x - \pi}.$$

Переходя под знаком предела к переменной $t = x - \pi$, получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t||2\pi + t| \sin^2 t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t||2\pi + t|t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} |t||2\pi + t|t = 0.$$

Аналогично и $f'(-\pi) = 0$. Таким образом, функция дифференцируема во всех точках.

108. По определению производной,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a + \Delta x - a) \cdot \varphi(a + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a + \Delta x) = \varphi(a)$$

(в силу непрерывности $\varphi(x)$ при $x = a$).

109. Покажем, что в точке $x = 0$ функция дифференцируема. Для этого достаточно доказать, что предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ существует и равен нулю. Это следует из того, что $\left| \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \right| \leq \left| \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} \right| = |\Delta x| < \varepsilon$, как только $|\Delta x| < \delta = \varepsilon$.

Покажем теперь, что при $x \neq 0$ $f'(x)$ не существует. От противного, предположим, что $f'(x)$ существует. Но тогда $f(x)$ должна быть непрерывна при этом x , однако рассматриваемая функция разрывна в каждой такой точке. Полученное противоречие доказывает утверждение.

110. Вычислим производную: $f'(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)} + \frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{\ln(1+x^2)}}$.

Функция $f'(x)$ определена при всех $x \neq 0$. Для $x = 0$ находим

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x\sqrt{\ln(1+x^2)} - 0}{x} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x\sqrt{\ln(1+x^2)} - 0}{x} = 0,$$

т. е. $f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0) = 0$. Итак, функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой и

$$f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0) = \begin{cases} \sqrt{\ln(1+x^2)} + \frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{\ln(1+x^2)}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

111. Имеем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(0 + \Delta x) = f(0)$ (поскольку $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} \right) = 0 = f(0)$), то по определению непрерывности в точке, функция $f(x)$ непрерывна в нуле. При этом односторонние производные

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \sin \frac{1}{\Delta x}$$

у этой чётной функции не существуют.

112. 1) Производная в точке $x = 0$ существует и равна нулю:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0.$$

2) При $x \neq 0$ имеем $f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. При $x \rightarrow 0$ первое слагаемое стремится к нулю, а предел второго не существует, следовательно, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

Функция f не является гладкой на $[-1, 1]$, несмотря на то, что она имеет производную во всех точках этого сегмента. Причина в том, что производная f' имеет в точке $x = 0$ разрыв 2-го рода, что невозможно для гладкой функции.

113. а) Имеем $x_0 = 0$ – точка разрыва 1-го рода, т. к.

$$f(\pm 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \pm 1.$$

По определению обобщённой производной,

$$\begin{aligned} f'_{\pm}(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}}{\Delta x} \mp 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3} \mp \Delta x}{(\Delta x)^2} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3} - |\Delta x|}{(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{\sqrt{1 + \Delta x} - 1}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{\Delta x}{|\Delta x|} = \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

б) Имеем $x_0 = 0$ – точка разрыва 1-го рода, т. к. $f(+0) = 0$, $f(-0) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} \right) = 0; \\ f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \left(\frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} - 1 \right) \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{|\Delta x|} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{|\Delta x|}}}} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{|\Delta x|} \left(1 - \frac{e^{\frac{1}{|\Delta x|}}}{1 + e^{\frac{1}{|\Delta x|}}} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{|\Delta x|}}} = 0 \end{aligned}$$

(здесь использовался предел $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} (y \cdot e^{-|y|}) = 0$).

114. Запишем условие непрерывности:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \Leftrightarrow x_0^2 = ax_0 + b. \quad (1)$$

Добавим условие дифференцируемости в этой точке: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Найдём, по определению, односторонние производные:

$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = 2x_0, \\ f'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a. \end{aligned}$$

Итак, условие дифференцируемости: $2x_0 = a$. (2)

Решая систему (1)–(2), находим $a = 2x_0$, $b = -x_0^2$.

115. Условие дифференцируемости функции в точке $x = 1$ имеет вид равенства в этой точке односторонних производных: $f'_-(1) = f'_+(1)$. Найдём эти производные:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1}{x - 1} =$$

(проще всего найти этот предел, используя правило Лопиталья, но если вы его ещё не изучали, попробуем иначе)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x^2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x) + (\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x^2 - 1) \operatorname{arctg} x}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} (x + 1) \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)' \Big|_{x=1} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1 + x^2} \Big|_{x=1} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Прежде чем вычислить правую производную, заметим, что функция должна удовлетворять в точке $x = 1$ условию непрерывности: $f(1 - 0) = f(1 + 0)$, т. е. $\frac{\pi}{4} = 9a + b$. Тогда

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{a(x + 2)^2 + b - (9a + b)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{a(x^2 + 4x - 5)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{a(x - 1)(x + 5)}{x - 1} = 6a. \end{aligned}$$

Осталось решить систему уравнений и найти искомые a и b :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} = 9a + b, \\ \frac{\pi+1}{2} = 6a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\pi+1}{12}, \\ b = -\frac{3+2\pi}{4}. \end{cases}$$

116. Во всех точках, кроме 0, функция непрерывна как элементарная. Функция f непрерывна в точке $x = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0),$$

т. е. $\lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 0-} e^x = 1 \Leftrightarrow b = 1$. Далее, для дифференцируемости в точке $x = 0$ необходимо (и достаточно), чтобы $f'_+(0) = f'_-(0)$, где

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x^2 + ax + b) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 + ax}{x} = a,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Таким образом, функция f дифференцируема на всей числовой прямой при $a = b = 1$.

117. Для дифференцируемости φ в точке x_0 необходимо условие непрерывности: $\varphi(x_0 - 0) = \varphi(x_0 + 0) = \varphi(x_0)$, которое в данном случае эквивалентно условию $f(x_0) = g(x_0 - 0)$. Кроме того, требуется выполнение равенства $\varphi'_+(x_0) = \varphi'_-(x_0)$, т. е. $f'_+(x_0) = g'(x_0 - 0)$.

118. а) Непрерывность в точке $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (|x|^a \sin \frac{1}{x}) = f(0) = 0$ – выполняется при $a > 0$.

б) Дифференцируемость в точке $x = 0$ исследуем только при $a > 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^a \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0$$

(существует при $a > 1$).

в) Непрерывная дифференцируемость в точке $x = 0$ (исследуем только при $a > 1$). Выясним, при каких из этих значений производная будет непрерывной в этой точке. Пусть $x > 0$, тогда

$$f'(x) = ax^{a-1} \cdot \sin \frac{1}{x} + x^a \cdot \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right).$$

Очевидно, что первое слагаемое при всех $a > 1$ стремится к нулю, а второе имеет предел (равный нулю) только при $a > 2$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = 0$ при $a > 2$.

Пусть теперь $x < 0$. Так как исходная функция нечётная, то её производная $f'(x)$ является чётной функцией, поэтому аналогично $\exists \lim_{x \rightarrow -0} f'(x) = 0$ при $a > 2$. Поскольку при $a > 2$ выполняется условие непрерывности производной в точке $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f'(x) = f'(0)$, то производная является непрерывной при $x = 0$, а функция $f(x)$, соответственно, непрерывно дифференцируемой в этой точке.

Ответ: а) при $a > 0$ функция является непрерывной в точке $x = 0$ (при $a \leq 0$ функция разрывна в этой точке);

б) при $a > 1$ функция дифференцируема в указанной точке;

в) при $a > 2$ функция непрерывно дифференцируема в $x = 0$.

119. а) Да. В самом деле,

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right). \end{aligned}$$

Этот предел не существует, т. к. по условию $g(x)$ не имеет производной в точке $x = 0$ (не существует предел второй из дробей).

б) Вообще говоря, нет, т. к. если $\psi(x)$ не имеет производной, а $\varphi(x)$ имеет производную, то за $f(x)$ можно принять $\psi(x)$, а за $g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$. Тогда $F(x) = \psi(x) + (\varphi(x) - \psi(x)) \equiv \varphi(x)$ будет иметь производную. Примеры из условия рассмотрите самостоятельно.

120. а) Вообще говоря, нет. По определению производной имеем:

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$

(добавляя в числителе дроби $\pm(f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0))$)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right).$$

Отсюда, в частности, следует, что если функция $g(x)$ определена в окрестности $|x - x_0| < \delta$, $f(x_0) = 0$, $\left| \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right| \leq M$, то $F'(x_0)$ существует. Например, если $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$, то $F'(0) = 0$.

б) Как и в случае а), получим для производной $F'(x_0)$ такое же выражение. Эта производная может существовать, например, тогда, когда обе функции непрерывны и $g(x_0) = 0$, $f(x_0) = 0$, $\left| \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right| \leq M$. Например, если $f(x) \equiv g(x) = |x|$, $x_0 = 0$, то $F'(0) = 0$.

121. а) По определению производной,

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} = 0$, а $\left| \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right| \leq M$, то $F'(x_0)$ существует и равна 0. Например, $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$, тогда $f(g(x)) = |x|^2$ – дифференцируема, $F'(0) = 0$.

б) Аналогично предыдущему, если потребовать, чтобы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = 0, \quad \text{а} \quad \left| \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} \right| \leq M,$$

то $F'(x_0)$ существует и равна 0. Например, $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, $x_0 = 0$.

в) $\chi(\chi(x)) \equiv 1$ – дифференцируемая функция, хотя функция Дирихле не дифференцируема ни в одной точке.

122. Вообще говоря, нет. В предложенном примере $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0$. (Точка $x = 0$ – точка перегиба графика функции). Здесь $f'(0)$ бесконечна, но при этом $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0 \neq \infty$.

123. Вообще говоря, нет: из неравенства $f_1(x) \geq f_2(x)$ не следует неравенство $f'_1(x) \geq f'_2(x)$. Например, $f_1(x) \equiv 4$, $f_2(x) = x^2$, $x \in [1, 2]$. На этом отрезке $f_1(x) \equiv 4 \geq x^2 = f_2(x)$, но $f'_1(x) \equiv 0 < 2x = f'_2(x)$. Или $f_1(x) \equiv 4 > f_2(x) \equiv 1$, но $f'_1(x) \equiv 0 \equiv f'_2(x)$.

124. Нет, так как производная дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции не может иметь разрывов 1-го рода.

125. Пусть при всех допустимых x имеем $f(-x) \equiv f(x)$, тогда

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= - \lim_{-\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = -f'(x). \end{aligned}$$

В случае нечётной функции доказывается аналогично.

126. В силу периодичности имеем $f(x) \equiv f(x + T)$ при всех $x \in X$. Продифференцировав это равенство по переменной x (в том числе, правую часть тождества как сложную функцию), получаем тождество $f'(x) \equiv f'(x + T)$, которое означает, что $f'(x)$ – периодическая функция с тем же периодом $T > 0$.

127. Например, функция Дирихле, её периодом является любое рациональное число, не равное нулю.

128. Необходимым условием дифференцируемости функции в точке является непрерывность функции в этой точке. Приравнявая функции x^2 и $2x - 1$, находим единственную точку непрерывности: $x = 1$. Убедимся в том, что функция дифференцируема в этой точке, вычислив производную по определению:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}.$$

Если x стремится к 1 по рациональным точкам, то получаем $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$,

а если по иррациональным, то $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 1) - 1}{x - 1} = 2$. Выходит, что как бы x ни стремилось к 1, производная $f'(1)$ существует и равна 2. Ответ на второй вопрос отрицательный, так как область определения обратной функции ($\equiv$ множество значений исходной функции) не содержит внутренних точек.

129. Например, $f(x) = \cos(\ln x)$, $x \in (0, +\infty)$.

130. Например, $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

131. Вообще говоря, нет. Записанное условие есть условие непрерывности справа для производной. В рассматриваемом примере в точке $x = 1$ производная существует (а значит, и односторонние производные), но в окрестности — нет, поэтому равенство невозможно.

Справедливо следующее утверждение. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ всюду на интервале $(a, a + \delta)$ (или на интервале $(a - \delta, a)$), где δ — некоторое положительное число, и, кроме того, имеет правую производную $f'_+(a)$ (левую производную $f'_-(a)$). Тогда, если производная $f'(x)$ имеет в точке a правый предел (соответственно, левый предел), то этот предел совпадает с правой производной $f'_+(a)$ (с левой производной $f'_-(a)$).

3 СЕМИНАР: Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Производная обратной функции

«Глупость — это не отсутствие ума. Это такой ум».

Александр Иванович Лебедь (1950–2002), российский
политический и военный деятель.

Выше мы рассмотрели важный случай *явного задания* функции одной действительной переменной, т. е. когда функция задана уравнением, разрешённым относительно переменной y : $y = f(x)$, $x \in X$. В общем случае функция может быть также задана в декартовой системе координат параметрически или неявно. Обратимся к этим случаям, выясним, при каких условиях в подобной ситуации функция будет дифференцируемой и как найти производную функции и её дифференциал.

3.1 Производная параметрически заданной функции

Понятие параметрически заданной функции одной действительной переменной. Параметрическое задание функции – это обобщение явного способа задания функции одной переменной и один из основных способов определения такого типа функций. Опишем, что означает, что некоторая однозначная функция $y = f(x)$ задана *параметрически*.

1) Пусть на некотором множестве $T \subseteq \mathbb{R}$ определены две функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T, \quad (1)$$

где t будем называть *параметром*.

2) Обозначим X – множество значений функции $x(t)$, и пусть на нём определена обратная функция $t = t^{-1}(x)$. Тогда, подставляя $t = t^{-1}(x)$ во второе уравнение системы, для любого $x \in X$ получим функцию $y = y(t^{-1}(x)) (= f(x))$. При этом областью определения функции $f(x)$ является множество X значений функции $x(t)$, а множеством значений функции $f(x)$ является множество Y значений функции $y(t)$.

Когда параметр t пробегает всё множество T , точка с координатами $(x(t), y(t))$ описывает на плоскости Oxy множество точек, которое является графиком функции $y = f(x)$.

Если обе функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на множестве T (наиболее распространённый случай), и при этом функция $x(t)$ строго монотонна на T , то

такая система описывает на плоскости некоторую непрерывную плоскую кривую, являющуюся графиком однозначной непрерывной функции $f(x)$. В этом случае принято говорить, что функция $y = f(x)$ задана *параметрически* системой (1).

Если убрать требование монотонности для $x(t)$, оставив условие непрерывности $x(t)$ и $y(t)$, то получим плоскую непрерывную кривую, заданную параметрически, и в этом случае совсем не обязательно каждому значению x будет соответствовать единственное значение y .

Любую функцию, заданную явно уравнением $y = f(x)$, $x \in X$, можно задать параметрически системой уравнений

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = f(t), \quad t \in X. \end{cases}$$

В этом смысле явное определение функции можно рассматривать как частный случай параметрического задания функции.

Пример 39. Функция $y = \sqrt{1 - x^2}$, где $x \in [-1, 1]$ (верхняя полуокружность единичного радиуса с центром в начале координат), может быть задана параметрически системой уравнений

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad \text{где } t \in [0, \pi]. \quad \square$$

Пример 40. Плоская кривая, заданная неявным уравнением $x^2 + y^2 = 1$, параметризуется системой уравнений

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad \text{где } t \in [0, 2\pi].$$

Это окружность и она не является однозначной функцией. $\square$

Замечание 1 (*векторное уравнение плоской кривой*). Пусть функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями (1). В этом случае можно ввести вектор-функцию $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$ и считать, что функция задана *векторным уравнением*:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in T.$$

Замечание 2 (*случай пространственной кривой*). Пространственная кривая задаётся системой трёх параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t \in T, \end{cases} \quad (1)$$

или как линия пересечения двух поверхностей (неявным образом)

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Производная функции, заданной параметрически. Для функций, определяемых параметрически, часто бывает необходимо найти производную y по x , не находя в явном виде зависимости y от x (к тому же это не всегда бывает легко сделать). Рассмотрим, как дифференцировать такие функции.

Теорема 1 (*о производной параметрически заданной функции*). Если функция $y = y(x)$ задана параметрически системой уравнений (1), где функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и $x'(t_0) \neq 0$, то функция $y(x)$ также дифференцируема в точке $x_0 = x(t_0)$, причём

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \text{или (в дифференциальной форме)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

где производная y'_x вычисляется в точке $x_0 = x(t_0)$, а производные y'_t, x'_t — в соответствующей точке t_0 .

Замечание 1. Фактически при переходе от $\frac{dy}{dx}$ к $\frac{dy/dt}{dx/dt}$ формальным «делением» числителя и знаменателя дроби на dt , в числителе и знаменателе образуются производные y'_t и x'_t и осуществляется переход от оператора дифференцирования по переменной x к операторам дифференцирования по переменной t .

Замечание 2. При параметрическом задании функции производная y'_x в общем случае оказывается зависящей от параметра t , а не от x , что может, особенно вначале, показаться несколько непривычным, но это нормальная ситуация.

Пример 41. [7, № 1040] Найти производную y'_x и указать, при каких x она существует, если:

$$x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Решение. Область определения функции $y(x)$ совпадает с областью значений функции $x = \sin^2 t$ и является сегментом $x \in [0, 1]$. Найдём производную.

1-й способ. Имеем $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2 \cos t \cdot (-\sin t)}{2 \sin t \cdot \cos t} = -1$, где $\sin 2t \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, поэтому производная существует при $x \in (0, 1)$.

2-й способ. Сложив уравнения, получим $x + y = 1$, откуда находим явное представление $y = 1 - x$. Тогда $y'_x = (1 - x)'_x = -1$.

Ответ: $y'_x = -1$ при $x \in (0, 1)$. $\square$

Вернёмся к элементам дифференциальной геометрии.

Замечание 3. Уравнение касательной к графику $y(x)$ в точке $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ при $y'_x(t_0) \neq \infty$ имеет вид:

$$y = y_0 + y'_x(t_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}(x - x_0) \Leftrightarrow \frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{x - x_0}{x'_t(t_0)}.$$

Уравнение нормали к графику $y(x)$ в точке (x_0, y_0) при $y'_x(t_0) \neq 0$ имеет вид:

$$y = y_0 - \frac{1}{y'_x(t_0)}(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = -\frac{x'_t(t_0)}{y'_t(t_0)}(x - x_0) \Leftrightarrow \frac{y - y_0}{x'_t(t_0)} = \frac{x - x_0}{-y'_t(t_0)}.$$

Если при этом $y'_x(t_0) = \infty$, то уравнение касательной имеет вид $x = x_0$, а если $y'_x(t_0) = 0$, то уравнение нормали имеет вид $x = x_0$.

Пример 42. Составить уравнения касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t^2, \\ y(t) = t - t^3, \end{cases}$$

в точке, соответствующей значению параметра $t = 2$.

Решение. Вычислим все необходимые значения $x(2) = -3$, $y(2) = -6$, $y'_t(t) = (1 - 3t^2)|_{t=2} = -11$, $x'_t(t) = (-2t)|_{t=2} = -4$, тогда $y'_x(2) = \frac{y'_t(2)}{x'_t(2)} = \frac{11}{4}$ и подставим их в уравнение касательной (прямой):

$$\frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} \Leftrightarrow \frac{y + 6}{-11} = \frac{x + 3}{-4} \Leftrightarrow 11x - 4y + 9 = 0.$$

Соответственно, уравнение нормальной прямой (нормали):

$$\frac{y + 6}{-4} = \frac{x + 3}{11} \Leftrightarrow 4x + 11y + 78 = 0. \square$$

3.2 Производная и дифференциал неявно заданной функции

«Математические науки, естественные науки и гуманитарные науки могут быть названы, соответственно, науками сверхъестественными, естественными и неестественными».

Лев Давидович Ландау (1908–1968) – советский физик-теоретик, академик АН СССР. Лауреат Нобелевской премии по физике 1962 года.

Понятие неявно заданной функции одной переменной. Рассмотрим уравнение с двумя переменными

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Если можно выразить переменную y из данного уравнения через переменную x , приведя его к виду $y = y(x)$, то говорят, что функция задана *явно*. В противном случае говорят, что уравнение (1) задаёт функцию y от x *неявным образом*.

Пример 43. Уравнение $y^3 + 3y = x$ неявным образом задаёт функцию $y(x)$. $\square$

Пример 44. Записать уравнение кривой в неявном виде:

$$\begin{cases} x(t) = a \operatorname{ch} t, \\ y(t) = b \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Решение. Имеем $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. Значит, кривая задаётся неявным уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Это гипербола. $\square$

Рассмотрим, каким образом в случае неявного задания функции, не приводя её к явному виду (тем более, что это часто невозможно), найти требуемую производную y по переменной x .

Теорема 2 (о производной и дифференциале функции, заданной неявно). Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то:

1) производная этой неявной функции может быть найдена из уравнения

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = 0,$$

полученного дифференцированием по переменной x неявного уравнения (1), где функция $F(x, y(x))$ рассматривается как сложная (дифференцируемая) функция переменной x ;

2) дифференциал неявной функции находится дифференцированием уравнения (1) (в смысле взятия дифференциала от левой и правой частей неявного уравнения):

$$d(F(x, y)) = 0,$$

из которого затем выражается dy .

Замечание. При неявном задании функции производная y'_x и дифференциал dy в общем случае оказываются зависящими сразу от двух переменных x и y .

Пример 45. Найти производную и дифференциал функции $y(x)$, заданной уравнением

$$2(x + y) - \ln y + 3 = 0.$$

Решение. 1) Найдём производную y' ($y > 0$), для этого продифференцируем уравнение по переменной x , учитывая, что y есть функция x :

$$2(1 + y') - \frac{y'}{y} = 0, \quad \text{откуда находим производную} \quad y' = \frac{2y}{1 - 2y} \quad (y \neq \frac{1}{2}).$$

2) Для нахождения дифференциала dy применим дифференциал к обеим частям уравнения (продифференцируем):

$$d(2(x+y) - \ln y + 3) = d(0) \Leftrightarrow 2dx + 2dy - \frac{dy}{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2dx + \left(2 - \frac{1}{y}\right)dy = 0 \Leftrightarrow dy = \frac{2y}{1-2y}dx.$$

Замечание. Если производная y' предварительно уже была вычислена, то при нахождении дифференциала проще было воспользоваться формулой $dy = y'dx$. $\square$

Пример 46. Пусть функция $y(x)$ определяется из уравнения $\ln(x^2 + y^2) = x - y$ и $x_0 = y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Найти $y'(x_0)$.

Решение. Дифференцируя равенство $\ln(x^2 + y^2(x)) = x - y(x)$, имеем

$$\frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} - 1 + y' = 0,$$

или, поскольку $x^2 + y^2 \neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) ,

$$2x + 2yy' - (1 - y')(x^2 + y^2) = 0, \quad (1)$$

откуда следует, что $y'(x) = \frac{x^2 + y^2(x) - 2x}{x^2 + y^2(x) + 2y(x)}$, следовательно, $y'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2} - 3$. $\square$

Пример 47. Найти уравнения касательной и нормали к кривой

$$x^2 + 4xy^2 + y^2 - y - 12 = 0 \quad \text{в точке } M_0(2, 1).$$

Решение. Проверив, что точка $M_0(2, 1)$ принадлежит данной кривой 3-го порядка, продифференцируем неявное уравнение по x :

$$(x^2 + 4xy^2 + y^2 - y - 12)'_x = 0 \Leftrightarrow (8xy + 2y - 1)y' = -(2x + 4y^2).$$

При условии $8xy + 2y - 1 \neq 0$ находим $y' = -\frac{2x + 4y^2}{8xy + 2y - 1} \Big|_{M_0} = -\frac{8}{17}$.

Тогда уравнение касательной:

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = 1 - \frac{8}{17}(x - 2) \Leftrightarrow 8x + 17y - 33 = 0.$$

Уравнение нормали:

$$y = y_0 - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) \Leftrightarrow y = 1 + \frac{17}{8}(x - 2) \Leftrightarrow 17x - 8y - 26 = 0. \quad \square$$

3.3 Производная обратной функции

«Если... , то... » — если это не математика, то это шантаж».

Хенрик Ягодзиньский (1928–2000), польский писатель-сатирик, журналист, автор множества афоризмов.

Представим себе ситуацию, когда необходимо вычислить производную обратной функции в ситуации, когда саму обратную функцию найти аналитически затруднительно или не представляется возможным. Как поступить? Ответ на этот вопрос дают следующие теоремы.

Теорема 3 (*производная обратной функции; формулировка в точке*). Пусть функция $y = y(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 ; пусть существует $y'(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $y_0 = y(x_0)$ определена обратная функция $x = x^{-1}(y)$, которая дифференцируема в точке y_0 и $(x^{-1}(y))' \Big|_{y_0} = \frac{1}{y'(x_0)}$, или, в дифференциальной форме,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

где производные берутся в соответствующих точках.

Теорема 4 (*производная обратной функции, в формулировке для интервала*). Пусть функция $y = y(x)$ определена, непрерывна и строго монотонно возрастает (убывает) на интервале (a, b) . Тогда в соответствующем интервале (A, B) , где $A = \lim_{x \rightarrow a+0} y(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow b-0} y(x)$, существует однозначная обратная функция $x = x^{-1}(y)$, также непрерывная и строго монотонно возрастающая (убывающая) на этом интервале. Производная обратной функции в каждой точке интервала (A, B) находится по той же формуле, что и в предыдущей формулировке теоремы.

Пример 48. Найти производные функций:

$$\text{а) } y = \arcsin x, x \in (-1, 1); \quad \text{б) } y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}.$$

Решение. а) Обратной функцией к арксинусу является функция $x = \sin y$ ($y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$). Далее воспользуемся формулой $\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, связывающей производные взаимно обратных функций:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

б) Аналогично имеем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}. \quad \square$$

3.4 Задачи для самостоятельного решения

№132. [7, № 780] Найти функцию $y = y(x)$, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \operatorname{arcctg} t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

В какой области определена эта функция?

№133. Найти неявные уравнения пространственной кривой

$$\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2, \\ z = 3t + t^3. \end{cases}$$

№134. Найти параметрические уравнения (при $x \geq 0$) пространственной кривой

$$\begin{cases} x^2 = 2z, \\ 2y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$$

Решить задачи на нахождение производных функций, заданных параметрически:

№135. Найти производную y'_x там, где она существует, если

$$x = t \cdot \ln t, \quad y = t^3 - 4t^2 + t.$$

№136. [7, № 1046] Найти производную y'_x там, где она существует, если

$$x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

№137. Найти y'_x , если $x = e^t \cdot \cos t$, $y = e^t \cdot \sin t$, где t – независимая переменная.

№138. Найти производную y'_x функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \arcsin(t - 1). \end{cases}$$

№139. Найти y'_x при $t = 0$, если

$$\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = t^2 - 2t^3. \end{cases}$$

№140. Найти уравнение касательной при $t = 1$ к параметрически заданной кривой:

$$\begin{cases} x = e^{-3t^2}, \\ y = 2t^2 + 3t. \end{cases}$$

№141. [7, № 1077(а,б)] Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

в точках: а) $t = 0$; б) $t = 1$.

№142. [7, № 1078(а,б,в)] Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \quad y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

в точках: а) $t = 0$; б) $t = 1$; в) $t = \infty$.

№143. [5, Пример 5.32] К кривой

$$\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

написать уравнения касательной в точках: а) $t = \frac{\pi}{2}$; б) $t = \pi$; в) $t = \frac{3\pi}{2}$.

Задачи на нахождение производных неявно заданных функций:

№144. [7, № 1048] Найти производную y'_x функции, заданной в неявном виде (не приводя к явному виду):

$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x.$$

Чему равна y'_x при $x = 2$ и $y = 4$, и при $x = 2$ и $y = 0$?

№145. [7, № 1049] Найти производную y'_x функции, заданной в неявном виде (не приводя к явному виду):

$$y^2 = 2px \quad (\text{парабола}).$$

№146. [7, № 1050] Найти производную y'_x функции, заданной в неявном виде (не приводя к явному виду):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{эллипс}).$$

№147. Найти $y'(x)$ и dy , если $y + \ln y + x^3 = 0$.

№148. Найти производную неявно заданной функции

$$3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1.$$

№149. Вычислить производную функции, заданной неявным образом при помощи уравнения

$$xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

№150. Найти дифференциал и производную первого порядка неявной функции $y(x)$, заданной уравнением

$$x^4 - 2x + 3y^2 + xy - 1 = 0.$$

№151. [5, Пример 5.28] Уравнение

$$x^3 + y^3 - y^5 - x = 0$$

определяет функцию $y(x)$. Найти $y'(1)$, если $y(1) = 1$.

№152. Найти dy , если функция $y(x)$ задана неявно уравнением

$$\operatorname{arctg}(x + y^2) = y.$$

№153. [7, № 1061] Под какими углами пересекаются кривые

$$y = x^2 \quad \text{и} \quad x = y^2?$$

№154. [7, № 1081] Написать уравнения касательной и нормали в точке $M(6; 6.4)$ к кривой

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

№155. Найти уравнения касательной и нормали в точке $P(0, 1)$ к кривой

$$x^2y + e^{xy^2} - y = 0.$$

№156. [5, Пример 5.34] Написать уравнения касательных в точках с абсциссами: а) $x = 0$; б) $x = a$ к кривой

$$3x^2 + 2y^2 - 4xy = a^2, \quad a > 0.$$

Задачи на свойства обратных функций и нахождение их производных:

№157. Найти функцию, обратную к функции $y = \log_a x$, а также её производную.

№158. Известно, что $x = y^3 + 1$, $y \in \mathbb{R}$. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x там, где она существует.

№159. [7, № 774] Доказать тождество:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in [-1, 1]).$$

Как, зная производную одной из этих функций (например, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$), найти производную другой: $(\arccos x)' = ?$

№160. Доказать тождество:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

№161. Найти x'_y , если $y = xe^x$, $x > 0$.

№162. Найти x'_y , если $y = e^x \operatorname{tg} x$, $x \in (0, 1)$. Чему равно значение x'_y при $x = \frac{\pi}{4}$?

3.5 Ответы и решения

132. Функции $\operatorname{arctg} t$ и $\operatorname{arccctg} t$ определены и непрерывны на всей оси, причём $\operatorname{arctg} t$ — строго монотонна (возрастает). Поэтому данная система определяет y как непрерывную однозначную функцию от x . При этом область определения функции $y(x)$ совпадает с областью значений функции $x = \operatorname{arctg} t$ и является интервалом $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Найдём $y(x)$.

1-й способ. Выразим из 1-го уравнения $t = \operatorname{tg} x$ и подставим во 2-е уравнение: $y = \operatorname{arccctg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$, где $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Здесь мы воспользовались тождеством $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha$ при $\alpha \in (0, \pi)$.

2-й способ. Сложим оба уравнения системы и воспользуемся тождеством $\operatorname{arctg} t + \operatorname{arccctg} t = \frac{\pi}{2}$ ($t \in \mathbb{R}$). Получим $x + y = \frac{\pi}{2}$, откуда получаем $y = \frac{\pi}{2} - x$, где $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

133. Для решения задачи необходимо исключить параметр t из системы уравнений. Сложим первое и третье уравнения системы, результат возведём в квадрат: $x^2 + 2xz + z^2 - 36t^2 = 0$. Согласно второму уравнению системы $t^2 = \frac{1}{3}y$, тогда имеем

$$x^2 + 2xz + z^2 - 12xy = 0. \quad (1)$$

Вычитая из третьего уравнения системы первое уравнение и возводя его в квадрат, получаем $27z^2 - 54xz + 27x^2 - 108t^6 = 0$. Сделав замену $t^6 = \frac{1}{27}y^2$, приходим к уравнению

$$27z^2 - 54xz + 27x^2 - 4y^3 = 0. \quad (2)$$

Итак, уравнения кривой в неявном виде

$$\begin{cases} x^2 + 2xz + z^2 - 12xy = 0, \\ 27z^2 - 54xz + 27x^2 - 4y^3 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x+z)^2 - 12xy = 0, \\ 27(x-z)^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

134. Заметим, что кривая расположена в полупространстве $z \geq 0$. Преобразуем второе уравнение $\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$, откуда $y = \sqrt{3} \sin t$, $z = \sqrt{6} \cos t$. Подставляя $z = \sqrt{6} \cos t$ в первое уравнение, находим $x = 2\sqrt{3} \cos t$. Итак, уравнения кривой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{3} \cos t, \\ y = \sqrt{3} \sin t, \\ z = \sqrt{6} \cos t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

135. При $t > 0$, $t \neq \frac{1}{e}$ имеем $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 - 8t + 1}{\ln t + 1}$.

136. 1-й способ. Так как $y'_t = \frac{t}{|t|(1+t^2)}$, $x'_t = \frac{1}{1+t^2}$, то $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t}{|t|} = \operatorname{sgn} t$, где $t \neq 0$.

2-й способ. Введём промежуточную переменную $z = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ($|z| < 1$). Так как $\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = 1$, то $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{1-z^2}$. Тогда имеем $x = \arcsin z$, $y = \arccos \sqrt{1-z^2}$ и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} : \frac{dx}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{z^2}} \cdot \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}} : \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{z}{|z|} = \operatorname{sgn}(z), \quad z \neq 0.$$

Так как $\operatorname{sgn}(z) = \operatorname{sgn}(t)$, то приходим к тому же ответу.

$$\begin{aligned} \mathbf{137.} \text{ При } x'_t \neq 0 \text{ имеем: } y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right)}{\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right)} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + t \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + t \right)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + t \right). \end{aligned}$$

138. Область определения: $0 \leq t \leq 2$.

$$1) \text{ Найдём } y'_t \text{ (при } 0 < t < 2): y'_t = (\arcsin(t-1))' = \frac{1}{\sqrt{1-(t-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}.$$

$$2) \text{ Найдём } x'_t: x'_t = (\sqrt{2t-t^2})' = \dots = \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}. \text{ Тогда } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{1-t}, \quad 0 < t < 2.$$

$$\mathbf{139.} \text{ Имеем } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t-6t^2}{2+2t} = \frac{t(1-3t)}{1+t} \Big|_{t=0} = 0.$$

140. Уравнение касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, где $x_0 = x(1) = e^{-3}$, $y_0 = y(1) = 5$, $f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4t+3}{-6te^{-3t^2}} \Big|_{t=1} = -\frac{7}{6}e^3$. Подставляя в уравнение касательной, получаем:

$$y = 5 - \frac{7e^3}{6}(x - e^{-3}) = -\frac{7e^3}{6}x + \frac{37}{6}.$$

141. Уравнение касательной в точке $(x_0, y(x_0))$ к графику функции $y = y(x)$: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$, а уравнение нормали: $y = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$.

а) Найдём $x_0 = x(0) = 0$, $y_0 = y(0) = 0$, тогда $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3-3t^2}{2-2t} \Rightarrow y'_x \Big|_{t=0} = \frac{3}{2}$. Уравнение касательной: $y = 0 + \frac{3}{2}(x - 0) = \frac{3}{2}x$, т. е. $3x - 2y = 0$. Уравнение нормали: $y = 0 - \frac{2}{3}(x - 0) = -\frac{2}{3}x$, т. е. $2x + 3y = 0$.

б) При $t = 1$ производная $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3-3t^2}{2-2t}$ не существует, однако суще-

ствуется конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{3(1-t)(1+t)}{2(1-t)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{3(1+t)}{2} = 3.$$

То есть для производной $t = 1$ есть точка устранимого разрыва. При $t = 1$ кривая имеет точку возврата $(1, 2)$, в которой «сходятся» две ветви. Если определить производную в этой точке её предельным значением, равным 3, то получим, что обе ветви кривой имеют в точке $t = 1$ общую для обеих ветвей полукасательную. Найдём её уравнение:

$$y = y(1) + y'_x(1)(x - x_0) = 2 + 3(x - 1), \quad \text{или } y = 3x - 1.$$

Тогда уравнение нормали в точке $(x_0, y_0) = (1, 2)$: $y = 2 - \frac{1}{3}(x - 1) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

142. Уравнение касательной в точке $(x(t_0), y(t_0))$:

$$y = y(t_0) + \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}(x - x(t_0)) = y(t_0) + \frac{t_0^4 - 4t_0^3 - 2t_0 + 2}{-t_0^4 - 4t_0^3 + 2t_0 + 2}(x - x(t_0)).$$

а) $t_0 = 0$: $y(0) = 0$, $x(0) = 0$, $y'_x(0) = 1 \Rightarrow$ касательная: $y = x$, нормаль: $y = -x$;

б) $t_0 = 1$: $y(1) = \frac{1}{2}$, $x(1) = \frac{3}{2}$, $y'_x(1) = 3 \Rightarrow$ касательная: $3x - y - 4 = 0$, нормаль: $x + 3y - 3 = 0$;

в) $t_0 = \infty$: $y(\infty) = 0$, $x(\infty) = 0$, $y'_x(\infty) = -1 \Rightarrow$ касательная: $y = -x$, нормаль: $y = x$.

143. Имеем $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg} \frac{3t}{2}$ ($\sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{3\pi}{2} \neq 0$).

а) При $t = \frac{\pi}{2}$ имеем $x = 1$, $y = 2$, причём $y'|_{t=\frac{\pi}{2}} = -1$. Тогда уравнение касательной: $y - 2 = -(x - 1)$.

б) При $t = \pi$ имеем $x = -3$, $y = 0$, причём $y'|_{t=\pi}$ не определена. В этой точке можно говорить только об односторонних полукасательных к каждой из ветвей. При этом $\lim_{t \rightarrow \pi-0} \operatorname{tg} \frac{3t}{2} = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow \pi+0} \operatorname{tg} \frac{3t}{2} = -\infty$. Поскольку обе полукасательные вертикальны (одна является продолжением другой), то кривая имеет в этой точке касательную $x = -3$ (см. график кривой в окрестности этой точки).

в) При $t = \frac{3\pi}{2}$ имеем $x = 1$, $y = -2$, причём $y'|_{t=\frac{3\pi}{2}} = 1$. Тогда уравнение касательной: $y + 2 = x - 1$.

144. Предварительно убедимся в том, что обе точки в условии задачи удовлетворяют уравнению. Продифференцируем уравнение по переменной x :

$$2x + 2(y + xy') - 2y \cdot y' = 2 \Leftrightarrow y'(x - y) = 1 - x - y,$$

т. е. $y' = \frac{x+y-1}{y-x}$ ($x \neq y$). Если $x = 2$, $y = 4$, то $y' = \frac{5}{2}$. Если $x = 2$, $y = 0$, то $y' = -1/2$.

145. Продифференцируем уравнение по переменной x , принимая во внимание, что x – независимая переменная, а y – функция от x :

$$2y \cdot y' = 2p, \quad \text{откуда} \quad y' = \frac{p}{y}, \quad \text{где } y \neq 0.$$

146. 1-й способ. Продифференцируем уравнение по переменной x :

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0, \quad \text{откуда} \quad y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \text{где } y \neq 0.$$

2-й способ: воспользоваться параметрическими уравнениями эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Ответ: $y'_x = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t$.

147. Продифференцируем уравнение один раз:

$$y' + \frac{y'}{y} + 3x^2 = 0 \quad (\Rightarrow y' = -\frac{3x^2 y}{y+1}).$$

Теперь для нахождения дифференциала dy (x – независимая переменная) воспользуемся формулой $dy = y'dx = -\frac{3x^2 y}{y+1} dx$.

148. Продифференцируем по x данное уравнение, учитывая, что y есть функция от x :

$$(3x^2 y^2 - 5x + \sin y)' = (3y - 1)' \Leftrightarrow \\ 3 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot x^2 \cdot 2y \cdot y' - 5 + \cos y \cdot y' = 3y'.$$

Выразим отсюда искомую производную y' : $(6x^2 y + \cos y - 3)y' = 5 - 6xy^2$ (при условии $6x^2 y + \cos y - 3 \neq 0$), откуда $y' = \frac{5 - 6xy^2}{6x^2 y + \cos y - 3}$.

149. Продифференцируем (при $y \neq 0$) равенство $xy = \arctg \frac{x}{y}$ по x с учётом того, что y – функция x : $y + xy' = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}$, откуда находим искомую производную $y' = \frac{y(1 - x^2 - y^2)}{x(1 + x^2 + y^2)}$.

150. Возьмём дифференциал: $d(x^4 - 2x + 3y^2 + xy - 1) = d(0) \Leftrightarrow 4x^3 dx - 2dx + 6y dy + x dy + y dx = 0 \Leftrightarrow (6y + x) dy = (-4x^3 + 2 - y) dx$, тогда при условии $6y + x \neq 0$ получаем $dy = \frac{-4x^3 + 2 - y}{6y + x} dx$. Производная – это коэффициент при dx , т. е. $y' = \frac{-4x^3 + 2 - y}{6y + x}$. Здесь имеется и другой способ решения, но он становится ясен после знакомства с дифференцируемыми функциями двух переменных.

151. Заметим, что значения $x = 1$ и $y = 1$ удовлетворяют данному уравнению. Дифференцируя исходное тождество $x^3 + y^3(x) - y^5(x) - x \equiv 0$ по переменной x , получаем $3x^2 + 3y^2y' - 5y^4y' - 1 = 0$. При $x = 1$ и $y = 1$ отсюда имеем $3 + 3y'(1) - 5y'(1) - 1 = 0$, откуда $y'(1) = 1$.

152. *1-й способ* (сначала находится производная, а затем дифференциал). Продифференцируем тождество $\arctg(x + y^2) = y$, взяв производную по x :

$$\frac{1}{1 + (x + y^2)^2} \cdot (1 + 2yy') = y', \quad \text{откуда } 1 + 2yy' = y'(1 + (x + y^2)^2).$$

Выражая отсюда y' , получим: $y' = \frac{1}{1 + (x + y^2)^2 - 2y}$. Тогда $dy = y'dx = \frac{dx}{1 + (x + y^2)^2 - 2y}$ (при условии $1 + (x + y^2)^2 - 2y \neq 0$).

2-й способ (сразу находится дифференциал). Продифференцируем уравнение, взяв дифференциал от обеих частей:

$$d(\arctg(x + y^2)) = dy \Leftrightarrow \frac{1}{1 + (x + y^2)^2} \cdot d(x + y^2) = dy \Leftrightarrow$$

$$dx + 2ydy = (1 + (x + y^2)^2) \cdot dy \Leftrightarrow dy = \frac{dx}{1 + (x + y^2)^2 - 2y}.$$

153. Сделайте рисунок. На рисунке видны две точки пересечения кривых: $(0, 0)$ и $(1, 1)$. 1) Очевидно, что в точке $(0, 0)$ кривые пересекаются под прямым углом ($\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$).

2) В точке $(1, 1)$ определим искомый угол φ_2 как угол между касательными к этим кривым в данной точке. Уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $x = 1$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1.$$

Для нахождения уравнения касательной к кривой $x = y^2$ в точке $x = 1$ найдём производную: $1 = 2y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{2y} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$. Тогда получаем уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Воспользуемся формулой для нахождения угла между двумя пересекающимися прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right| \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_2 = \left| \frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + \frac{1}{2} \cdot 2} \right| = \frac{3}{4}$$

(модуль поставлен для нахождения тангенса острого угла между прямыми). Следовательно, $\varphi_2 = \arctg \frac{3}{4}$.

154. Убедившись, что данная точка лежит на кривой (удовлетворяет уравнению), вычислим производную:

$$\frac{2x}{100} + \frac{2y \cdot y'}{64} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{16x}{25y} \Rightarrow y'(M) = -0,6.$$

Тогда уравнение касательной имеет вид: $y = 6,4 - 0,6(x - 6) \Leftrightarrow y = -0,6x + 10$, или $3x + 5y - 50 = 0$.

Уравнение нормали: $y = 6,4 + \frac{1}{6,4}(x - 6) \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x - 3,6$, или $5x - 3y - 10,8 = 0$.

155. Убедимся предварительно в том, что координаты указанной в условии точки удовлетворяют данному уравнению. Уравнение касательной имеет вид: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$, где $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Найдём производную $y'(x_0)$. Продифференцировав уравнение по x , находим

$$2xy + x^2y' + e^{xy^2}(y^2 + 2xy \cdot y') - y' = 0,$$

откуда $(x^2 + 2xye^{xy^2} - 1)y' = -2xy - y^2e^{xy^2}$ и при условии $x^2 + 2xye^{xy^2} - 1 \neq 0$ получаем

$$y' = \frac{-2xy - y^2e^{xy^2}}{x^2 + 2xye^{xy^2} - 1} \Big|_{(0,1)} = 1.$$

Поэтому уравнение касательной в точке $P(0, 1)$ принимает окончательный вид $y = 1 + (x - 0) = 1 + x$.

Уравнение нормали: $y = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) = 1 - 1(x - 0) = 1 - x$.

156. Продифференцировав уравнение, получим $6x + 4yy' - 4y - 4xy' = 0$ и при $x \neq y$ получаем $y' = \frac{3x - 2y}{2(x - y)}$. а) Значению $x = 0$ отвечают на кривой две точки $M_1(0, \frac{a}{\sqrt{2}})$ и $M_2(0, -\frac{a}{\sqrt{2}})$. Поскольку $y'|_{M_1} = y'|_{M_2} = 1$, то уравнение касательной в точке M_1 имеет вид $y = x + \frac{a}{\sqrt{2}}$, а в точке M_2 имеет вид $y = x - \frac{a}{\sqrt{2}}$.

б) Значению $x = a$ на кривой отвечает единственная точка $M_0(a, a)$, в которой формула выше для производной не применима. Так как функция $y(x)$ непрерывна в этой точке и $\lim_{x \rightarrow a} y'(x) = \infty$, то в точке M_0 кривая имеет вертикальную касательную $x = a$.

157. 1) Найдём функцию, обратную к логарифмической функции $y = \log_a x$, для чего пропотенцируем данное равенство по основанию a : $a^y = x$, т. е. $x(y) = a^y$, $y \in \mathbb{R}$. Итак, обратной функцией является показательная функция $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$.

2) Используя теорему о производной обратной функции, найдём производную функции $y = a^x$ ($\Rightarrow x = \log_a y$), зная производную логарифмической функции: $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\log_a y)} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$.

158. Функция $x = y^3 + 1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}, \text{ где } x \neq 1.$$

159. Перепишем тождество в виде: $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. (1)

Оценим значения левой и правой частей этого равенства: $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos x \in [0, \pi] \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arccos x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Так как на сегменте $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ функция синус строго монотонна (возрастает), то применяя эту функцию к равенству (1), получаем равносильное равенство, верное при всех $x \in [-1, 1]$:

$$\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \Leftrightarrow x = \cos(\arccos x) \Leftrightarrow x = x.$$

Поскольку данное равенство верно, то доказываемое тождество также верно.

Для нахождения производной от арккосинуса выразим его из данного тождества и продифференцируем полученное равенство (если функции тождественно равны и дифференцируемы, то их производные равны):

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

160. Перепишем тождество в виде $\arctg x = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg } x$. Оценим значения левой и правой частей этого равенства: $\arctg x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\text{arcctg } x \in (0, \pi) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \text{arcctg } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Так как на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ функция тангенс строго монотонна (возрастает), то применяя эту функцию к последнему равенству, получаем равносильное равенство, верное при всех $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{tg}(\arctg x) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arcctg } x\right) \Leftrightarrow x = \text{ctg}(\text{arcctg } x) \Leftrightarrow x = x.$$

161. По теореме о производной обратной функции имеем:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(xe^x)'_x} = \frac{1}{e^x(x+1)}, \quad x \neq -1.$$

Иначе: можно было продифференцировать уравнение $y = xe^x$ по переменной y : $1 = x'_y e^x + xe^x x'_y$, откуда приходим к тому же результату: $x'_y = \frac{1}{e^x(x+1)}$.

162. На данном интервале дифференцируемая функция $y(x)$ возрастает (как произведение двух положительных возрастающих функций), а значит, имеет обратную функцию $x(y)$, которая также дифференцируема. Найдём её производную:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x \left(\text{tg } x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)} = \frac{1}{e^x(\text{tg}^2 x + \text{tg } x + 1)} \Bigg|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3e^{\frac{\pi}{4}}}.$$

4 СЕМИНАР: Производные и дифференциалы высших порядков

«Не спеши, а то успеешь».

Александр Иванович Лебедь (1950—2002) — российский политический и военный деятель.

4.1 Производные высших порядков функций, заданных явно

Понятие производной n -го порядка. Пусть функция $f(x)$, определённая на интервале (a, b) , имеет в каждой точке $x \in (a, b)$ производную $f'(x)$ и пусть $x_0 \in (a, b)$. Если при $x = x_0$ у производной $f'(x)$, в свою очередь, существует производная, то она называется *производной второго порядка*, или *второй производной*, функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0}, \quad y^{(2)}(x_0), \quad f''(x_0).$$

Её производная, если она существует хотя бы в одной точке, называется *производной 3-го порядка* и т. д. Так по аналогии можно определить *производную n -го порядка*, которую, соответственно, обозначают

$$\left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x=x_0}, \quad y^{(n)}(x_0), \quad f^{(n)}(x_0).$$

Таким образом, по определению

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right), \quad n = 2, 3, \dots$$

Можно считать, что в последнем равенстве $n = 1, 2, \dots$, если под производной нулевого порядка понимать саму функцию.

Если необходимо указать переменную, по которой берётся производная, то пишут

$$y''_{xx} \quad \text{или} \quad f''_{x^2}, \quad y^{(n)}_{x^n},$$

хотя для функций одной переменной это и так очевидно. Так же вводятся понятия односторонних производных любого порядка.

Отметим, что из предположения, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную порядка n , следует в силу определения последней, что в некоторой окрестности точки x_0 у функции $f(x)$ существует производная порядка $(n-1)$,

а следовательно, при $n > 1$ и все производные более низкого порядка $k < n - 1$ (в частности, сама функция определена в некоторой окрестности точки x_0). При этом все производные, порядок которых меньше $(n - 1)$, непрерывны в указанной окрестности, поскольку во всех её точках они имеют производную.

Понятие непрерывной дифференцируемости. Функция $f(x)$ называется n раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, если во всех точках этого промежутка она имеет непрерывные производные до порядка n включительно ($n = 0, 1, 2, \dots$). При этом в граничной точке рассматриваемого промежутка (в том случае, когда эта точка принадлежит промежутку) под производной любого порядка понимается соответствующая односторонняя производная.

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на интервале (a, b) , то пишут $f(x) \in C^n(a, b)$. В частности, если функция имеет непрерывные производные всех порядков, то это обозначают $f(x) \in C^\infty(a, b)$. Например, $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Для того чтобы функция была n раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, достаточно, чтобы она имела на нём непрерывную производную порядка n . Действительно, согласно определению, существование производной порядка n на рассматриваемом промежутке предполагает существование на нём производной порядка $(n - 1)$ и, поскольку из существования производной какой-либо функции в некоторой точке следует непрерывность функции в этой точке, производная порядка $(n - 1)$ непрерывна на данном промежутке. Аналогично, в случае $n \geq 2$ доказывается непрерывность производной порядка $(n - 2)$ и т. д.

Пример 49. Найти производные всех порядков $y^{(n)}(x)$ для функции

$$y(x) = x^5 - 3x^2 + 4x - 7 + e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Последовательно дифференцируя, находим:

$$y' = 5x^4 - 6x + 4 + 2e^{2x}, \quad y'' = 20x^3 - 6 + 4e^{2x}, \quad y''' = 60x^2 + 8e^{2x},$$

$$y^{(4)} = 120x + 16e^{2x}, \quad y^{(5)} = 120 + 32e^{2x}.$$

При $n \geq 6$ имеем $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$. $\square$

Пример 50. Найти $y^{(10)}(x)$ для функции $y(x) = \ln(2x - 1)$, $x > \frac{1}{2}$.

Решение. Чтобы прояснить ситуацию и, возможно, выявить некоторую закономерность, найдём несколько первых производных (и не спешим в числителях всё перемножать):

$$y'(x) = \frac{1}{2x-1} \cdot (2x-1)' = \frac{1 \cdot 2}{2x-1}, \quad y''(x) = \left(\frac{1 \cdot 2}{2x-1} \right)' = -\frac{1 \cdot 2^2}{(2x-1)^2},$$

$$y'''(x) = \left(-\frac{1 \cdot 2^2}{(2x-1)^2} \right)' = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 2^3}{(2x-1)^3}, \quad y^{(4)}(x) = \left(-\frac{1 \cdot 2 \cdot 2^3}{(2x-1)^3} \right)' = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4}{(2x-1)^4},$$

$$y^{(5)}(x) = \left(-\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4}{(2x-1)^4} \right)' = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^5}{(2x-1)^5}, \dots$$

Анализируя полученные результаты, выявляем закономерность, по которой из каждой производной получается следующая производная. Видим, что, во-первых, каждый раз у производной меняется знак, во-вторых, в числителе «растёт» факториал, причём он «отстаёт» от порядка производной ровно на одну единицу. При этом в числителе увеличивается на единицу степень «двойки», и эта степень равна порядку производной. То же самое можно сказать о степени в знаменателе. Попробуем теперь записать результат в общем виде:

$$y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)! \cdot 2^n}{(2x-1)^n}.$$

Строго говоря, это пока гипотеза, которую ещё следует доказать методом математической индукции (сделайте это самостоятельно). Подставляя в полученную формулу $n = 10$, окончательно получаем

$$y^{(10)}(x) = \frac{(-1)^{11} \cdot 9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}} = -\frac{9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}}. \quad \square$$

Производные высших порядков элементарных функций. Ниже приведены производные высших порядков ($n \geq 2$) некоторых из элементарных функций:¹

1. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$, $a > 0$, в частности, $(e^x)^{(n)} = e^x$;
2. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, $x > 0$;
3. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$, $n = 0, 1, \dots$; $m \in \mathbb{R}$;
в частности, при $m = -1$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}; \quad \left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}};$$

4. $((a+bx)^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)b^n(a+bx)^{m-n}$, $m \in \mathbb{R}$;
5. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$;
6. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$;
7. $(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & \text{если } n = 2k, \\ \operatorname{ch} x, & \text{если } n = 2k+1; \end{cases}$
 $(\operatorname{ch} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{если } n = 2k, \\ \operatorname{sh} x, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$

Иногда при дифференцировании помогают упрощающие приёмы.

¹Соотношения доказываются математической индукцией, проведённой по порядку производной.

Пример 51. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$ ($a \neq 0$).

Решение. Не будем дифференцировать напрямую, а поступим иначе: разложим вначале функцию в сумму простых дробей

$$y = \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{(a+x) + (a-x)}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right).$$

Тогда, дифференцируя n раз, получаем:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2a} \left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}} \right). \quad \square$$

Для нахождения высших производных от функций $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin^3 x$, $\cos^3 x$ и др. можно использовать формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x), \quad \cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x).$$

Пример 52. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y(x) = \sin^2 x$.

Решение. Имеем $(\sin^2 x)^{(n)} = \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right)^{(n)} = -\frac{1}{2}(\cos 2x)^{(n)} =$
 $= -\frac{1}{2} \cdot 2^n \cos \left(2x + \frac{\pi n}{2} \right) = -2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{\pi n}{2} \right). \quad \square$

4.2 Дифференциалы высших порядков функций, заданных явно

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке x . Определим дифференциал n -го порядка функции $f(x)$ в этой точке рекуррентно как дифференциал, взятый от дифференциала $(n-1)$ -го порядка:

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)), \quad n = 2, 3, \dots$$

При этом дифференциал рассматривается как функция от x , а приращение dx при последовательном использовании формулы $d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$ считается постоянным и *остаётся одним и тем же* при переходе от дифференциала к следующему (по порядку) дифференциалу.

Итак, в общем случае, когда $f(x)$ – дифференцируемая соответствующее число раз функция, дифференциалы второго и более высокого порядка можно

вычислять последовательно, используя приведённое выше рекуррентное определение дифференциала (как дифференциала от дифференциала предыдущего порядка) и формулу дифференциала сложной функции, например:

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2 x,$$

$$d^3 f = d(d^2 f) = d(f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2 x) = \dots$$

В случае, когда x – независимая переменная, имеем

$$d^2 f(x) = d^3 f(x) = \dots = 0,$$

и тогда формула для вычисления дифференциалов высших порядков принимает более простой вид¹

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Замечание. Для производной n -го порядка функции $f(x)$ независимой переменной x справедливо представление $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Пример 53. Найти дифференциалы функций (x – независимая переменная):

$$\text{а) } d^2(3 \sin x + x^4); \quad \text{б) } d^3(x^4).$$

Решение. По формуле $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ в точке x имеем:

$$\text{а) } d^2(3 \sin x + x^4) = (3 \sin x + x^4)'' dx^2 = (-3 \sin x + 12x^2) dx^2;$$

$$\text{б) } d^3(x^4) = (x^4)^{(3)} dx^3 = 24x dx^3. \quad \square$$

4.3 Производные и дифференциалы высших порядков от суммы и произведения функций. Формула Лейбница.

*«Если сложить тёмное прошлое со светлым будущим,
получится серое настоящее.»*

*Михаил Жванецкий (1934–2020) – русский
писатель-сатирик.*

Теорема 1 (*линейность производной и дифференциала n -го порядка*). Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ n раз дифференцируемы в точке x и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда их линейная комбинация $\alpha u + \beta v$ также n раз дифференцируема в точке x , причём

$$(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha \cdot u^{(n)} + \beta \cdot v^{(n)},$$

$$d^n(\alpha u + \beta v) = \alpha \cdot d^n u + \beta \cdot d^n v.$$

¹Запись dx^n означает $(dx)^n$. Не путать с $d(x^n)$.

Теорема 2 (*формула Лейбница*). Производная n -го порядка от произведения $y = u(x)v(x)$ двух n раз дифференцируемых функций вычисляется по формуле:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по k ($k = 0, 1, \dots, n$), а под производными нулевого порядка понимаются сами функции: $u^{(0)} = u(x)$, $v^{(0)} = v(x)$.

Следствие. Принимая во внимание соотношение между дифференциалом и производной того же порядка ($d^n y = y^{(n)}(x) dx^n$), получаем аналогичную формулу для дифференциалов произвольных порядков:

$$d^n(uv) = (uv)^{(n)} dx^n = \sum_{p=0}^n C_n^p u^{(n-p)} \cdot v^{(p)} dx^n,$$

где под дифференциалами нулевого порядка понимаются сами функции: $d^0 u = u(x)$, $d^0 v = v(x)$.

Замечание 1. Формулу Лейбница в дифференциальной форме можно записать также в виде

$$d^n(uv) = \sum_{p=0}^n C_n^p \cdot d^{n-p} u \cdot d^p v.$$

Замечание 2. В формуле Лейбница x – независимая переменная.

Формула Лейбница особенно эффективна, когда одна из функций имеет конечное число ненулевых производных, т. е. когда $u(x)$ или $v(x)$ – многочлен.

Пример 54. [7, № 1161] Найти $y^{(20)}(x)$ и $d^{20}y(x)$, если $y = x^2 \cdot e^{2x}$.

Решение. Положим $u = x^2$, $v = e^{2x}$, тогда $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u''' = \dots = u^{(20)} = 0$, $v' = 2e^{2x}$, $v'' = 2^2 e^{2x}$, ..., $v^{(20)} = 2^{20} e^{2x}$. Вычислив коэффициенты $C_{20}^0 = 1$, $C_{20}^1 = 20$, $C_{20}^2 = \frac{20!}{2!18!} = 190$, подставим в формулу Лейбница:

$$\begin{aligned} (x^2 e^{2x})^{(20)} &= C_{20}^0 u^{(0)} v^{(20)} + C_{20}^1 u' v^{(19)} + C_{20}^2 u'' v^{(18)} = \\ &= x^2 \cdot 2^{20} \cdot e^{2x} + 20 \cdot 2x \cdot 2^{19} \cdot e^{2x} + 190 \cdot 2 \cdot 2^{18} \cdot e^{2x} = 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95). \end{aligned}$$

Тогда $d^{20}y(x) = (2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)) dx^{20}$. □

4.4 Производные высших порядков функций, заданных параметрически

«В любом из нас спит гений.

И с каждым днём всё крепче...»

Михаил Жванецкий (1934–2020) — русский писатель-сатирик.

Выше мы говорили, что если функция задана параметрически, то её первая производная находится по правилу: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ ($x'_t \neq 0$). Найдём выражение для производной 2-го порядка:

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(y'_x)}{dx} =$$

(разделив числитель и знаменатель на dt , перейдём к операторам дифференцирования по переменной t)

$$= \frac{d(y'_x)/dt}{dx/dt} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad (1)$$

где $x'_t \neq 0$.¹ Аналогично выводятся выражения для производных более высоких порядков:

$$y'''_{x^3} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \dots, \quad y^{(n)}_{x^n} = \frac{(y^{(n-1)}_{x^{n-1}})'_t}{x'_t}.$$

Пример 55. Найти y''_{xx} , если $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ (окружность).

Решение. Имеем $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t$ ($\sin t \neq 0$). Тогда

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}. \quad \square$$

4.5 Производные и дифференциалы высших порядков функций, заданных неявно

Производные высших порядков. Пусть функция $y(x)$ задана неявным образом уравнением

$$F(x, y(x)) = 0, \quad (1)$$

¹Если в формуле (1) подставить вместо y'_x её выражение $\frac{y'_t}{x'_t}$, то получим окончательно:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

где функция F определена и дифференцируема достаточное количество раз на интервале (a, b) .

Мы уже знаем, что для вычисления первой производной необходимо один раз продифференцировать тождество (1) по переменной x

$$(F(x, y(x)))'_x = 0 \quad (2)$$

и затем выразить из него искомую производную $y'(x)$ (через x и y). Для нахождения второй производной $y''(x)$ надо продифференцировать уравнение (2)

$$(F(x, y(x)))''_{xx} = 0$$

и из полученного равенства выразить $y''(x)$ (через $y'(x)$, x и y).

Аналогично, производные $y_{x^3}^{(3)}$, $y_{x^4}^{(4)}$ и более высоких порядков находятся последовательным дифференцированием исходного уравнения соответствующее число раз.

Пример 56. Найти $y''(x)$, если $y + \ln y + x^3 = 0$.

Решение. Дифференцируя уравнение при $y > 0$ один раз, получаем

$$y' + \frac{y'}{y} + 3x^2 = 0 \quad \left(\Rightarrow \quad y' = -\frac{3x^2 y}{y + 1} \right).$$

Продифференцируем ещё раз:

$$y'' + \frac{y''y - (y')^2}{y^2} + 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y''y^2 + y''y - (y')^2 + 6xy^2 = 0,$$

$$y''(y^2 + y) = (y')^2 - 6xy^2 \quad \Leftrightarrow \quad y'' = \frac{(y')^2 - 6xy^2}{y^2 + y}.$$

Мы нашли производную и она зависит не только от x и y , но и от y' . Можно, далее, подставить вместо y' её выражение, найденное выше. После упрощений получим

$$y'' = 3xy \cdot \frac{3x^3 - 2y^2 - 4y - 2}{(y + 1)^3}. \quad \square$$

Пример 57. Пусть функция $y(x)$ определяется из уравнения $\ln(x^2 + y^2) = x - y$ и $x_0 = y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Найти $y'(x_0)$ и $y''(x_0)$.

Решение. Дифференцируя равенство $\ln(x^2 + y^2(x)) = x - y(x)$, имеем

$$\frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} - 1 + y' = 0,$$

или, поскольку $x^2 + y^2 \neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) ,

$$2x + 2yy' - (1 - y')(x^2 + y^2) = 0, \quad (1)$$

откуда следует, что $y'(x) = \frac{x^2 + y^2(x) - 2x}{x^2 + y^2(x) + 2y(x)}$, следовательно, $y'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2} - 3$.

Дифференцируя по x равенство $y' = \frac{x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2 + 2y}$, получим y'' . Заметим, что в равенство, определяющее y'' , входит y' , которая уже найдена. Технически проще найти y'' , дифференцируя равенство (1). В нашем случае имеем

$$2 + 2(y')^2 + 2yy'' + (x^2 + y^2)y'' - (1 - y')(2x + 2yy') = 0,$$

поэтому

$$2 + 2(2\sqrt{2} - 3)^2 + \sqrt{2} \cdot y'' \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + y'' \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (1 - (2\sqrt{2} - 3))(\sqrt{2} + \sqrt{2}(2\sqrt{2} - 3)) = 0,$$

откуда находим $y''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4(7 - 5\sqrt{2})$. $\square$

Дифференциалы высших порядков. При последовательном вычислении дифференциалов высших порядков важно помнить, что dx есть произвольное и независимое от x число,¹ которое при дифференцировании по x следует рассматривать как постоянный множитель.

Пример 58. Найти d^2y в произвольной точке (x, y) и в точке $M(-1, 1)$, если

$$y + \ln y + x^3 = 0.$$

Решение. Возьмём дифференциал от обеих частей уравнения:

$$\begin{aligned} d(y + \ln y + x^3) = 0 &\Leftrightarrow dy + \frac{dy}{y} + 3x^2 dx = 0 \Leftrightarrow \\ ydy + dy + 3x^2 y dx = 0 &\left(\Rightarrow dy = -\frac{3x^2 y}{y+1} dx \right). \end{aligned}$$

Второй раз возьмём дифференциал:

$$\begin{aligned} d(ydy + dy + 3x^2 y dx) = 0 &\Leftrightarrow d(ydy) + d^2y + 3dx \cdot d(x^2 y) = 0 \Leftrightarrow \\ dy^2 + yd^2y + d^2y + 3dx(d(x^2)y + x^2 dy) = 0 &\Leftrightarrow \\ (y+1)d^2y = -dy^2 - 3(2xydx + x^2 dy)dx. \end{aligned}$$

Для приведения второго дифференциала к стандартному виду ($d^2y = y''dx^2$) разделим последнее равенство на $y+1$ ($\neq 0$) и подставим в правой части вместо dy его выражение, найденное выше. После упрощений получим

$$d^2y = 3xy \cdot \frac{3x^3 - 2y^2 - 4y - 2}{(y+1)^3} dx^2,$$

где коэффициент при dx^2 есть вторая производная y'' . Тогда $d^2y|_M = \frac{33}{8} dx^2$. $\square$

¹Мы рассматриваем случай, когда x – независимая переменная.

4.6 Производные высших порядков обратных функций

«... Мысль о пространстве рождает «ах»,
Оперу, взгляд в лорнёт.
В числах есть нечто, чего нет в словах,
Даже крикнув их, нет...»

И.А. Бродский (1940–1996) — русский поэт, эссеист,
драматург и переводчик. Лауреат Нобелевской премии
по литературе 1987 года.

Пусть функция $y = y(x)$, $x \in (a, b)$, дифференцируема достаточное число раз и имеет обратную функцию $x = x(y)$. Тогда производные x' , x'' , x''' и т. д. (при условии $y' \neq 0$) находятся следующим образом:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y'} \right) = \frac{d \left(\frac{1}{y'} \right)}{dy} =$$

(умножив и разделив в знаменателе на dx , перейдём от оператора дифференцирования по переменной y к оператору дифференцирования по x)

$$= \frac{d \left(\frac{1}{y'} \right)}{\frac{dy}{dx} \cdot dx} = \frac{1}{y'} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y'} \right) = \frac{1}{y'} \cdot \left(-\frac{1}{(y')^2} \cdot y'' \right) = -\frac{y''}{(y')^3} \quad \text{и т. д.}$$

Пример 59. Найти x' и x'' , если $y = x \cdot e^x$, $x > 0$.

Решение. По правилу дифференцирования обратной функции имеем

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{(xe^x)'} = \frac{1}{e^x(x+1)};$$

$$x'' = -\frac{y''}{(y')^3} = -\frac{e^x(x+2)}{(e^x(x+1))^3} = -\frac{x+2}{e^{2x}(x+1)^3}. \quad \square$$

4.7 Производные высших порядков сложных функций

Рассмотрим сложную функцию $y = f(g(x))$, $x \in (a, b)$. Пусть требуется найти вторую производную y по x . Обратимся к теореме.

Теорема 3. Пусть функция $g = g(x)$ имеет вторую производную в точке $x_0 \in (a, b)$, а функция $y = f(g)$ имеет вторую производную в точке $g_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ имеет в точке $x = x_0$ вторую производную, причём

$$y''_{xx} = f''_{gg} \cdot (g'_x)^2 + f'_g \cdot g''_{xx}.$$

При этом второй дифференциал находится по формуле $d^2y = y''_{xx} dx^2$.

Доказательство. Первая производная сложной функции вычисляется по правилу $y'_x = f'_g \cdot g'_x$ (производные берутся в соответствующих точках). Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \right) = \frac{d^2 f}{dg^2} \cdot \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 + \frac{df}{dg} \cdot \frac{d^2 g}{dx^2} = \\ &= f''_{gg} \cdot (g'_x)^2 + f'_g \cdot g''_{xx}. \quad \square\end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляются, при соответствующих предположениях, и производные более высоких порядков сложной функции.

Пример 60. Операторы дифференцирования n -го порядка функции e^{-x^2} присутствуют, например, в записи так называемых многочленов Эрмита $(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.¹

Пример 61. Найти $d^2 f$, если $f(x) = x^3$, в двух случаях:

- 1) x – независимая переменная; 2) $x(t) = t^2$ – функция независимой переменной t .

Решение. 1) Имеем: $d^2 f = f''(x)dx^2 = 6x dx^2$.

2) С учётом $x = t^2$, $dx = 2t dt$, $d^2 x = d(2t dt) = 2dt^2$ имеем

$$\begin{aligned}d^2 f &= f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2 x = 6x(dx)^2 + 3x^2 d^2 x = 6t^2(2t dt)^2 + 3t^4 \cdot 2dt^2 = \\ &= 24t^4 dt^2 + 6t^4 dt^2 = 30t^4 dt^2.\end{aligned}$$

Именно такой результат мы бы получили, если просто подставили в функцию $f(x) = x^3$ вместо x выражение t^2 и затем вычислили дифференциал получившейся функции $g(t) = t^6$:

$$d^2 f(x(t)) = d^2 g(t) = g''(t)dt^2 = 30t^4 dt^2. \quad \square$$

Пример 62. Найти $d^2 y$ и y''_{xx} , если $y = f(v)$, $v = x \ln x$.

Решение. Имеем $dy = f'_v dv \Rightarrow d^2 y = d(f'_v dv) = d(f'_v)dv + f'_v d^2 v = f''_{vv} dv^2 + f'_v d^2 v$.

Найдём $dv = \ln x dx + x \cdot \frac{dx}{x} = (\ln x + 1)dx$, $d^2 v = d((\ln x + 1)dx) = \frac{dx^2}{x}$. Тогда

$d^2 y = f'' \cdot ((\ln x + 1)dx)^2 + f'_v \cdot \frac{dx^2}{x} = \left(f''(\ln x + 1)^2 + \frac{f'_v}{x} \right) dx^2$, а $y''_{xx} = f''(\ln x + 1)^2 + \frac{f'_v}{x}$, причём производные f', f'' берутся в точке $v = x \ln x$. $\square$

¹Многочлены Эрмита были впервые определены Пьером–Симоном Лапласом в 1810 году, хотя и в едва узнаваемой форме, и подробно изучены русским математиком Пафнутием Львовичем Чебышёвым (1821–1894) в 1859 году. Работа Чебышёва, однако, была проигнорирована, и позже они были названы в честь французского математика Чарльза Эрмита, который написал о многочленах в 1864 году, описывая их как новые. Многочлены широко распространены: они возникают в обработке сигналов и теории вероятностей, в комбинаторике и численном анализе, в физике, в теории систем и др. Многочлены Эрмита образуют ортогональный базис в гильбертовом функциональном пространстве.

4.8 Задачи для самостоятельного решения

№163. Привести пример функции, определённой и дифференцируемой на всей числовой оси, но не имеющей второй производной в одной точке.

Считая x независимой переменной и применяя при необходимости предварительные преобразования и формулу Лейбница, вычислить производные и дифференциалы высших порядков функций, заданных явно:

№164. [7, № 1133] d^2y , если $y = x^x$;

№165. [7, № 1165] $y^{(50)}$, если $y = x^2 \cdot \sin 2x$;

№166. [7, № 1173] $d^{10}y$, если $y = x \cdot \cos 2x$;

№167. [7, № 1175] d^6y , если $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$;

№168. [5, Пример 5.22] $y^{(10)}$, если $y = (x^3 + 4x^2 + 2)e^{2x}$;

№169. [7, № 1197] $y^{(n)}$, если $y = \sin(ax) \cdot \sin(bx)$;

№170. [7, № 1198] $y^{(n)}$, если $y = \cos(ax) \cdot \cos(bx)$;

№171. [7, № 1201] $y^{(n)}$ и $d^n y$, если $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

№172. $y^{(n)}$, если $y = \frac{4x+7}{2x+3}$;

№173. $y^{(n)}$, если $y = \ln(4-x^2)$, $x \in (-2, 2)$;

№174. [7, № 1211] $d^n y$, если $y = x^n \cdot e^x$;

№175. $d^n y$, если $y = (x^2 - 7x)e^{-3x}$;

№176. [7, № 1212] $d^n y$, если $y = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$).

№177. [7, № 1226] Доказать, что многочлены Чебышёва

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \cos(m \arccos x), \quad m \in \mathbb{N},$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2) \cdot T_m''(x) - x \cdot T_m'(x) + m^2 \cdot T_m(x) = 0.$$

№178. Доопределить функцию по непрерывности в точке устранимого разрыва и вычислить, используя определение, её первую и вторую производные в этой точке:

$$y = \frac{e^{-3x} - 1}{x}.$$

№179. Существуют ли $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, если $f(x) = x^2 |\operatorname{tg} x|$.

Вычислить производные и дифференциалы высших порядков функций, заданных параметрически:

№180. [7, № 1143] Найти производные y'_x , y''_{x^2} , y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной параметрически, если

$$\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t, \\ y = e^t \cdot \sin t. \end{cases}$$

№181. [7, № 1142] Найти производные y'_x , y''_{x^2} , y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной параметрически (*циклоида*), если

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

№182. Найти производную $y''(x)$, если

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t). \end{cases}$$

№183. Найти y''_{xx} в точке $(x, y) = (0, 1)$, если

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \sin t + \operatorname{sh} t \cos t, \\ y = \operatorname{ch} t \cos t - \operatorname{sh} t \sin t. \end{cases}$$

№184. Найти y'''_{x^3} в точке $x = 1$, если

$$\begin{cases} x = e^t + t, \\ y = t^3. \end{cases}$$

Вычислить производные и дифференциалы высших порядков функций, заданных неявно:

№185. Найти y' , y'' , y''' и dy , d^2y , d^3y , если $x^2 + y^2 = 1$.

№186. Найти y'' , если $y = e^y + 4x$.

№187. Найти y'' , если $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$.

№188. Найти d^2f , если $f(x)$ задана при всех $x \in \mathbb{R}$ уравнением

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2.$$

Вычислить производные и дифференциалы высших порядков сложных функций (x – независимая переменная):

№189. [7, № 1130] Найти d^2y для функции $y = e^x$ в случаях: а) x есть независимая переменная; б) x – промежуточный аргумент (функция некоторой другой переменной).

№190. Найти dy и d^2y для функции $y = f(x)$ в случаях: а) x есть независимая переменная; б) $x = \sin t \cdot \ln t$ (функция независимой переменной t).

№191. Найти dy и d^2y , если $y = f(2^x)$.

№192. Найти du , u'_x и d^2u , u''_{xx} , если $u = f(v)$, $v(x) = e^{2x} \sin 3x$.

Вычислить производные и дифференциалы высших порядков обратных функций (не находя самих обратных функций):

№193. Вывести в общем виде формулу для нахождения производной 3-го порядка x''' от функции $x = x(y)$, обратной к функции $y = y(x)$.

№194. Найти x' и x'' , а также dx , d^2x , если $y = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

№195. Найти x'' , если $y = x \ln x + 1$, $x > 0$.

4.9 Ответы и решения

163. Например, функция $y = x^{\frac{4}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

164. Так как $y' = (e^{x \ln x})' = x^x(\ln x + 1)$, то $dy = y'dx = x^x(\ln x + 1)dx$. Тогда $d^2y = (x^x(\ln x + 1))'dx^2 = (x^x(\ln x + 1)(\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x})dx^2 = x^x((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x})dx^2$.

165. По формуле Лейбница для производных высших порядков имеем

$$\begin{aligned} y^{(50)}(x) &= \sum_{i=0}^{50} C_{50}^i (x^2)^{(i)} \cdot (\sin 2x)^{(50-i)} = \\ &= C_{50}^0 \cdot x^2 \cdot 2^{50} \cdot \sin \left(2x + \frac{50\pi}{2} \right) + C_{50}^1 \cdot 2x \cdot 2^{49} \cdot \sin \left(2x + \frac{49\pi}{2} \right) + \\ &\quad + C_{50}^2 \cdot 2 \cdot 2^{48} \cdot \sin \left(2x + \frac{48\pi}{2} \right) = \\ &= x^2 \cdot 2^{50}(-\sin 2x) + 50 \cdot 2x \cdot 2^{49} \cdot \cos 2x + \frac{50!}{2! \cdot 48!} \cdot 2 \cdot 2^{48} \cdot \sin 2x = \\ &= 2^{50} \left(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1225}{2} \sin 2x \right). \end{aligned}$$

166. Имеем $d^{10}y(x) = y^{(10)}(x)dx^{10}$, по формуле Лейбница найдём производную 10-го порядка:

$$\begin{aligned} (x \cdot \cos 2x)^{(10)} &= \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i \cdot (x)^{(i)} \cdot (\cos 2x)^{(10-i)} = \\ &= C_{10}^0 \cdot (x)^{(0)} \cdot (\cos 2x)^{(10)} + C_{10}^1 \cdot x' \cdot (\cos 2x)^{(9)} = \\ &\quad (\text{остальные слагаемые равны нулю, т. к. } x'' = x''' = \dots = 0, \text{ а } (\cos 2x)^{(i)} = \\ &\quad 2^i \cdot \cos(2x + \frac{\pi i}{2})) \\ &= x \cdot 2^{10} \cdot \cos \left(2x + \frac{10\pi}{2} \right) + 10x' \cdot 2^9 \cdot \cos \left(2x + \frac{9\pi}{2} \right) = \\ &= -x \cdot 2^{10} \cdot \cos 2x - 10 \cdot 2^9 \cdot \sin 2x = -2^{10}(x \cos 2x + 5 \sin 2x). \end{aligned}$$

Тогда $d^{10}y(x) = -2^{10}(x \cos 2x + 5 \sin 2x)dx^{10}$.

167. Имеем $d^6y = y^{(6)}(x)dx^6$, найдём $y^{(6)}(x)$ по формуле Лейбница:

$$\begin{aligned} y^{(6)}(x) &= \sum_{i=0}^6 C_6^i \cos \left(x + \frac{\pi i}{2} \right) \cdot \operatorname{ch}^{(6-i)} x = \cos x \cdot \operatorname{ch} x + 6(-\sin x) \operatorname{sh} x + \\ &\quad + 15(-\cos x) \operatorname{ch} x + 20 \sin x \operatorname{sh} x + 15 \cos x \operatorname{ch} x + 6(-\sin x) \operatorname{sh} x + (-\cos x) \operatorname{ch} x = \end{aligned}$$

$= 8 \sin x \operatorname{sh} x$. Окончательно, $d^6 y = (8 \sin x \operatorname{sh} x) dx^6$.

168. Положим $u(x) = x^3 + 4x^2 + 2$, $v(x) = e^{2x}$, тогда, применяя формулу Лейбница и учитывая, что все производные порядка выше 3-го функции $u(x) = x^3 + 4x^2 + 2$ равны 0, находим

$$\begin{aligned} y^{(10)}(x) &= ((x^3 + 4x^2 + 2)e^{2x})^{(10)} = C_{10}^0 \cdot (x^3 + 4x^2 + 2)^{(0)} \cdot (e^{2x})^{(10)} + \\ &+ C_{10}^1 \cdot (x^3 + 4x^2 + 2)^{(1)} \cdot (e^{2x})^{(9)} + C_{10}^2 \cdot (x^3 + 4x^2 + 2)^{(2)} \cdot (e^{2x})^{(8)} + \\ &+ C_{10}^3 \cdot (x^3 + 4x^2 + 2)^{(3)} \cdot (e^{2x})^{(7)} = 2^{10} \cdot e^{2x} \cdot (x^3 + 4x^2 + 2) + \\ &+ 2^9 \cdot 10 \cdot (3x^2 + 8x)e^{2x} + 2^8 \cdot 45 \cdot (6x + 8)e^{2x} + 2^7 \cdot 120 \cdot 6 \cdot e^{2x} = \\ &= 2^7 \cdot e^{2x}(8(x^3 + 4x^2 + 2) + 40(3x^2 + 8x) + 90(6x + 8) + 720) = \\ &= 2^7 \cdot e^{2x}(8x^3 + 152x^2 + 860x + 1456). \end{aligned}$$

169. По формуле произведения синусов имеем $y = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$, тогда $y^{(n)} = \frac{1}{2} \left((a-b)^n \cos \left((a-b)x + \frac{\pi n}{2} \right) - (a+b)^n \cos \left((a+b)x + \frac{\pi n}{2} \right) \right)$.

170. По формуле произведения косинусов $y = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x)$, тогда $y^{(n)} = \frac{1}{2} \left((a-b)^n \cos \left((a-b)x + \frac{\pi n}{2} \right) + (a+b)^n \cos \left((a+b)x + \frac{\pi n}{2} \right) \right)$.

171. По формулам понижения степени имеем:

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(2 \cos^2 2x + 2) = \frac{1}{4}(1 + \cos 4x + 2) = \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x, \text{ тогда } y^{(n)}(x) = 4^{n-1} \cdot \cos \left(4x + \frac{\pi n}{2} \right), d^n y(x) = y^{(n)}(x) dx^n, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

172. Т. к. $y = 2 + \frac{1}{2x+3}$, то $y' = -\frac{2}{(2x+3)^2}$, $y'' = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2^2}{(2x+3)^3}$, $y''' = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3}{(2x+3)^4}$, $y^{(4)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4}{(2x+3)^5}$, ..., $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n}{(2x+3)^{n+1}}$. Строго говоря, выведенную формулу следует затем доказать, например, методом математической индукции.

173. Преобразуем функцию к виду $y = \ln(4 - x^2) = \ln(2 - x) + \ln(2 + x)$, тогда, последовательно дифференцируя, получим:

$$y' = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}, \quad y'' = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{1}{(2+x)^2}, \quad y''' = -\frac{1 \cdot 2}{(2-x)^3} + \frac{1 \cdot 2}{(2+x)^3},$$

$$y^{(4)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(2-x)^4} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(2+x)^4}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = -\frac{(n-1)!}{(2-x)^n} + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(2+x)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Строго говоря, выведенную формулу следует затем доказать, например, методом математической индукции.

174. Имеем $d^n y = \sum_{i=0}^n C_n^i d^{n-i}(x^n) \cdot d^i e^x =$

$$= \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot n(n-1)\dots(n-(n-i)+1) x^{n-(n-i)} dx^{n-i} \cdot e^x dx^i =$$

$$= e^x dx^n \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot \frac{n!}{i!} \cdot x^i = e^x \left(\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 (n-i)! \cdot x^i \right) dx^n,$$

так как $C_n^i = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$ и, следовательно, $\frac{n!}{i!} = C_n^i \cdot (n-i)!$

175. По формуле Лейбница имеем

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i (x^2 - 7x)^{(i)} \cdot (e^{-3x})^{(n-i)} = (x^2 - 7x)(-3)^n \cdot e^{-3x} +$$

$$+ n(2x - 7)(-3)^{n-1} e^{-3x} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot (-3)^{n-2} e^{-3x} =$$

$$= (-3)^{n-2} e^{-3x} (9(x^2 - 7x) - 3n(2x - 7) + n(n-1)) =$$

$$= (-3)^{n-2} e^{-3x} (9x^2 - x(63 + 6n) + 21n + n(n-1)).$$

Тогда $d^n y = y^{(n)}(x) dx^n$.

176. Представим функцию в виде $y = \ln x \cdot \frac{1}{x}$ и воспользуемся формулой Лейбница:

$$d^n y = \sum_{i=0}^n C_n^i d^i(\ln x) \cdot d^{n-i} \left(\frac{1}{x} \right) =$$

$$= C_n^0 d^0(\ln x) \cdot d^n \left(\frac{1}{x} \right) + \sum_{i=1}^n C_n^i d^i(\ln x) \cdot d^{n-i} \left(\frac{1}{x} \right) =$$

$$= \left(\ln x \cdot \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \sum_{i=1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{(-1)^{i-1} (i-1)!}{x^i} \cdot \frac{(-1)^{n-i} (n-i)!}{x^{n-i+1}} \right) dx^n =$$

$$= \left(\ln x \cdot \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^{n+1}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) dx^n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left(\ln x - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) dx^n.$$

177. Последовательно дифференцируя $T_m(x)$ два раза, находим

$$T'_m(x) = \frac{m}{2^{m-1}} \cdot \frac{\sin(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$T_m''(x) = \frac{-m^2 \cos(m \arccos x)}{2^{m-1}(1-x^2)} + \frac{xm \sin(m \arccos x)}{2^{m-1}(1-x^2)^{3/2}} = -\frac{m^2}{1-x^2} \cdot T_m(x) + \frac{x \cdot T_m'(x)}{1-x^2}.$$

Подставляя найденные значения производных в левую часть исходного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} & (1-x^2) \cdot T_m''(x) - x \cdot T_m'(x) + m^2 \cdot T_m(x) = \\ & = (1-x^2) \cdot \left(-\frac{m^2}{1-x^2} \cdot T_m(x) + \frac{x \cdot T_m'(x)}{1-x^2} \right) - x \cdot T_m'(x) + m^2 \cdot T_m(x) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

178. Вычислим предел функции в точке разрыва $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - 1}{x} = -3$ и определим функцию в точке $x = 0$ этим предельным значением до непрерывной.

Теперь можно вычислить первую производную функции в этой точке $f'(0)$ (с использованием правила Лопиталя):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{-3x}-1}{x} + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - 1 + 3x}{x^2} \stackrel{[L]}{=} -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - 1}{x} = \frac{9}{2}.$$

Для того чтобы вычислить вторую производную в точке $x = 0$, найдём производную в окрестности этой точки: $f'(x) = \frac{-e^{-3x}(3x+1)+1}{x^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-e^{-3x}(3x+1)+1}{x^2} - \frac{9}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^{-3x}(3x+1) + 2 - 9x^2}{2x^3} \\ &\stackrel{[L]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x}(3x+1) - e^{-3x} - 3x}{x^2} \stackrel{[L]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3e^{-3x}(3x+1) + 6e^{-3x} - 3}{2x} \stackrel{[L]}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9e^{-3x}(3x+1) - 9e^{-3x} - 18e^{-3x}}{2} = -9. \end{aligned}$$

179. 1) Найдём $f'(0)$ по определению производной в точке:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 |\operatorname{tg} x| - 0}{x} = 0.$$

2) Найдём $f_+''(0)$, предварительно упростив при $x > 0$ функцию $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$ и вычислив её производную $f'(x) = (x^2 \operatorname{tg} x)' = 2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x}$. Тогда

$$f_+''(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x} - 0}{x} = 0,$$

аналогично находится $f''_-(0) = 0$. Так как в точке $x = 0$ существуют обе односторонние вторые производные, которые равны, то функция имеет в этой точке $f''(0) = 0$.

3) Найдём $f'''_+(0)$, предварительно вычислив вторую производную в правой окрестности точки $x = 0$:

$$f''(x) = \left(2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x} \right)' = 2 \operatorname{tg} x + \frac{2x}{\cos^2 x} + \frac{2x \cos^2 x - x^2 \cdot 2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f'''_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2 \operatorname{tg} x + \frac{2x}{\cos^2 x} + \frac{2x \cos^2 x + x^2 \cdot \sin 2x}{\cos^4 x} - 0}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(2 \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{x} + \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{2 \cos^2 x + x \cdot \sin 2x}{\cos^4 x} \right) = 6. \end{aligned}$$

Так как функция f чётная, то f' – нечётная, f'' – чётная, f''' – нечётная, значит, $f'''_-(0) = -6$, т. е. $f'''(0)$ не существует.

Ответ: $f'(0), f''(0)$ существуют, $f'''(0)$ не существует.

180. По формулам дифференцирования параметрически заданных функций имеем

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right)}{\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right)} = \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + t \right) \quad (\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \neq 0); \\ y''_{xx} &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4} + t)}}{e^t \cdot \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + t)} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cos^3(\frac{\pi}{4} + t)}; \\ y'''_{x^3} &= \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{-e^t \cos^3(\frac{\pi}{4} + t) - e^{-t} \cdot 3 \cos^2(\frac{\pi}{4} + t)(-\sin(\frac{\pi}{4} + t))}{\sqrt{2} \cos^6(\frac{\pi}{4} + t) \cdot e^t \cdot \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + t)} = \\ &= \frac{e^{-2t}(3 \sin(\frac{\pi}{4} + t) - \cos(\frac{\pi}{4} + t)) \cos^2(\frac{\pi}{4} + t)}{2 \cos^7(\frac{\pi}{4} + t)} = \\ &= \frac{e^{-2t}(3 \sin(\frac{\pi}{4} + t) - \cos(\frac{\pi}{4} + t))}{2 \cos^5(\frac{\pi}{4} + t)} = \frac{e^{-2t} \cdot \sqrt{2}(2 \sin t + \cos t)}{2 \cos^5(\frac{\pi}{4} + t)} = \\ &= \frac{e^{-2t} \cdot (2 \sin t + \cos t)}{\sqrt{2} \cos^5(\frac{\pi}{4} + t)}, \quad t \neq \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

181. Имеем $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$, где $\cos t \neq 1$, т. е. $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Далее,

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t)} = \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}};$$

$$y'''_{x^3} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{4a}(-4) \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin^5 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{a(1 - \cos t)} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{2a^2 \cdot \sin^5 \frac{t}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{4a^2 \cdot \sin^7 \frac{t}{2}},$$

где $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

182. Найдём первую производную:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-2e^t \sin t}{2e^t \cos t} = -\operatorname{tg} t, \quad \cos t \neq 0.$$

Найдём вторую производную:

$$y''_{xx}(x) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{2e^t \cos t} = -\frac{1}{2e^t \cos^3 t}, \quad \cos t \neq 0.$$

183. Найдём производные $y'_t = -2 \operatorname{ch} t \sin t$, $x'_t = 2 \operatorname{ch} t \cos t$, тогда $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\operatorname{tg} t$ и $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{2 \operatorname{ch} t \cos t} = -\frac{1}{2 \operatorname{ch} t \cos^3 t}$. Заметим, что точке $(0, 1)$ соответствует значение $t = 0$. Подставляя это значение в выражение для второй производной, находим $y''_{xx} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2}$.

184. Значению $x = 1$ в силу возрастания $x(t)$ соответствует $t = 0$. Имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{e^t + 1}; \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{6t(e^t + 1) - 3t^2 e^t}{(e^t + 1)^3}; \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} =$$

$$= \frac{(6(e^t + 1) + 6te^t - 3(2te^t + t^2 e^t))(e^t + 1)^3 - (6t(e^t + 1) - 3t^2 e^t) \cdot 3(e^t + 1)^2 e^t}{(e^t + 1)^7} \Big|_{t=0}$$

$$= 3/4.$$

185. Дифференцируем уравнение по переменной x ($y \neq 0$):

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}, \quad dy = y'dx = -\frac{xdx}{y},$$

$$y'' = (y')' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x(-\frac{x}{y})}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3} \Rightarrow d^2 y = -\frac{dx^2}{y^3};$$

$$y''' = (y'')' = \left(-\frac{1}{y^3}\right)' = -\frac{-3y^2 y'}{y^6} = \frac{3}{y^4} \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3x}{y^5}, \quad d^3 y = y''' dx^3.$$

186. Продифференцируем по x и найдём 1-ю производную: $y' = e^y \cdot y' + 4$
 $\Leftrightarrow y' = \frac{4}{1 - e^y}$. Найдём 2-ю производную:

$$y'' = \left(\frac{4}{1 - e^y} \right)' = -4 \cdot \frac{1}{(1 - e^y)^2} \cdot (1 - e^y)' = \frac{4e^y \cdot y'}{(1 - e^y)^2}.$$

Подставив вместо y' её значение, получим: $y'' = \frac{4e^y \cdot \frac{4}{1 - e^y}}{(1 - e^y)^2} = \frac{16e^y}{(1 - e^y)^3}$.

187. Уравнение задаёт эллипс. Для нахождения первой производной продифференцируем уравнение: $4x + 6yy' = 0$, т. е. $2x + 3yy' = 0$, откуда $y' = -\frac{2x}{3y}$. Для нахождения второй производной продифференцируем равенство $2x + 3yy' = 0$: $2 + 3((y')^2 + yy'') = 0$. В полученное равенство подставим найденную выше первую производную $2 + 3\left(\left(-\frac{2x}{3y}\right)^2 + yy''\right) = 0$ и после упрощения и умножения на $3y^2$ получим: $6y^2 + 4x^2 + 9y^3y'' = 0$. Отсюда выражаем искомую производную: $y'' = -\frac{4x^2 + 6y^2}{9y^3} = -\frac{2(2x^2 + 3y^2)}{9y^3} = -\frac{4}{3y^3}$ ($y \neq 0$).

188. Здесь удаётся найти явный вид функции, а уже затем вычислить d^2f . Положим $y = 1 - x$, тогда $x = 1 - y$ и уравнение принимает вид

$$2f(1 - y) + f(y) = (1 - y)^2 \quad (\text{при всех } y \in \mathbb{R}).$$

Следовательно, последнее тождество будет выполняться, если переобозначить y на x (при всех $x \in \mathbb{R}$). Решая систему

$$\begin{cases} 2f(1 - x) + f(x) = (1 - x)^2, \\ 2f(x) + f(1 - x) = x^2, \end{cases}$$

находим $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1)$, тогда $d^2f(x) = \frac{2}{3}dx^2$.

189. Найдём вначале первый дифференциал: $dy = d(e^x) = e^x dx$. Теперь непосредственным дифференцированием найдём второй дифференциал: $d^2y = d(dy) = d(e^x dx)$. Применим далее правило дифференциала произведения: $d^2y = d(e^x)dx + e^x d(dx)$.

а) Так как x есть независимая переменная, то её первый дифференциал – это приращение $dx = \Delta x$, которое не зависит от точки x , и поэтому $d(dx) = d^2x = 0$. Так как одно из слагаемых обнулилось, то остаётся упрощённая формула $d^2y = d(e^x)dx = (e^x)'(dx)^2 = e^x dx^2$.

б) Если же x – промежуточный аргумент, то, вообще говоря, $d^2x \neq 0$ и в выражении для второго дифференциала $d^2y = d(e^x)dx + e^x d(dx)$ остаются оба слагаемых, и тогда получаем: $d^2y = e^x dx^2 + e^x d^2x$.

190. Для первого дифференциала имеем: $dy = f'(x)dx$. Второй дифференциал: $d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$.

а) Если x есть независимая переменная, то её первый дифференциал есть приращение $dx = \Delta x$, которое не зависит от точки x , и поэтому $d^2x = 0$. Тогда $dy = f'(x)dx$, а в выражении для второго дифференциала последнее из слагаемых обнуляется и остаётся упрощённая формула $d^2y = f''(x)dx^2$.

б) Если x – промежуточный аргумент, то, вообще говоря, $d^2x \neq 0$ и в выражении для второго дифференциала остаются оба слагаемых. Имеем: $dx = x'(t)dt = (\sin t \ln t)' dt = (\cos t \ln t + \sin t \cdot \frac{1}{t}) dt$, $d^2x = x''(t)dt^2 = (-\sin t \cdot \ln t + \cos t \cdot \frac{1}{t} + \cos t \cdot \frac{1}{t} - \sin t \cdot \frac{1}{t^2}) dt^2$, и тогда получаем:

$$dy = f'(x)dx = f'(x) \cdot (\cos t \ln t + \sin t \cdot \frac{1}{t}) dt,$$

$$\begin{aligned} d^2y &= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x = f''(x)(\cos t \ln t + \sin t \cdot \frac{1}{t})^2 dt^2 + \\ &+ f'(x) \left(-\sin t \cdot \ln t + \cos t \cdot \frac{2}{t} - \sin t \cdot \frac{1}{t^2} \right) dt^2, \end{aligned}$$

где производные $f'(x)$, $f''(x)$ вычисляются в точке $x = x(t)$.

191. Введём промежуточную переменную $t = 2^x$, тогда $y = f(t(x))$ и получаем

$$\begin{aligned} dy &= f'_t dt = f'_t d(2^x) = f'_t \cdot 2^x \ln 2 dx, \\ d^2y &= d(dy) = d(f'_t dt) = d(f'_t) dt + f'_t d^2t = f''_{tt} dt^2 + f'_t d^2t = \\ &= f''_{tt} (2^x \ln 2 dx)^2 + f'_t d(2^x \ln 2 dx) = \\ &= f''_{tt} (2^x \ln 2 dx)^2 + \ln 2 \cdot f'_t (d(2^x) dx + 2^x d^2x) = \\ &= f''_{tt} (2^x \ln 2 dx)^2 + \ln 2 \cdot f'_t 2^x \ln 2 dx^2 = \ln^2 2 \cdot 2^x (2^x f''_{tt} + f'_t) dx^2, \end{aligned}$$

где производные f'_t , f''_{tt} берутся в точке x . При вычислении дифференциала $d(2^x \ln 2 dx)$ не только $\ln 2$, но и dx не зависят от x и как константы могут быть вынесены из-под знака дифференциала, что ускоряет вычисление второго дифференциала.

192. 1) Найдём первый дифференциал и производную первого порядка: поскольку $du = f'(v)dv$, а $dv = v'(x)dx = e^{2x}(2 \sin 3x + 3 \cos 3x)dx$, то $du = f'(v) \cdot e^{2x}(2 \sin 3x + 3 \cos 3x)dx$, а производная u'_x есть коэффициент при dx , т. е. $u'_x = f'(v)e^{2x}(2 \sin 3x + 3 \cos 3x)$, где производная f' берётся в точке $v = e^{2x} \sin 3x$.

2) Найдём второй дифференциал и производную второго порядка: $d^2u = f^{(2)}(v)(dv)^2 + f'(v)d^2v$, где $d^2v = v^{(2)}(x)(dx)^2 = e^{2x}(12 \cos 3x - 5 \sin 3x)dx^2$. Тогда $d^2u = f^{(2)}(v)(e^{2x}(2 \sin 3x + 3 \cos 3x)dx)^2 + f'(v)e^{2x}(12 \cos 3x - 5 \sin 3x)dx^2 = (f^{(2)}(v)(e^{2x}(2 \sin 3x + 3 \cos 3x))^2 + f'(v)e^{2x}(12 \cos 3x - 5 \sin 3x))dx^2$. При этом коэффициент при dx^2 будет второй производной: $u''_{xx} = f^{(2)}(v) \cdot (e^{2x}(2 \sin 3x + 3 \cos 3x))^2 + f'(v)e^{2x}(12 \cos 3x - 5 \sin 3x)$.

193. Выше уже была найдена производная 2-го порядка от обратной функции. Используя её, вычислим следующую по порядку производную (при этом удобно воспользоваться дифференциальной формой записи производной):

$$\frac{d^3 x}{dy^3} = \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 x}{dy^2} \right) = \frac{d}{dy} \left(-\frac{y''}{(y')^3} \right) = \frac{d \left(-\frac{y''}{(y')^3} \right)}{dy} =$$

(перейдём от оператора дифференцирования по переменной y к оператору дифференцирования по x , при $y' \neq 0$)

$$= \frac{d \left(-\frac{y''}{(y')^3} \right)}{\frac{dy}{dx} \cdot dx} = \frac{1}{y'} \cdot \frac{d}{dx} \left(-\frac{y''}{(y')^3} \right) = -\frac{1}{y'} \cdot \frac{y'''(y')^3 - y'' \cdot 3(y')^2 y''}{(y')^6} = \frac{3(y'')^2 - y' y'''}{(y')^5}.$$

194. Так как $y = x + e^x$, то $y' = 1 + e^x$ и имеем

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 + e^x} \Rightarrow dx = \frac{dy}{1 + e^x},$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{1 + e^x} \right) = \frac{1}{y'} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + e^x} \right) = \dots = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^3} \Rightarrow d^2 x = -\frac{e^x dy^2}{(1 + e^x)^3}.$$

195. По правилу дифференцирования обратной функции имеем

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{(x \ln x)'} = \frac{1}{\ln x + 1}; \quad x'' = -\frac{y''}{(y')^3} = -\frac{1}{x(\ln x + 1)^3}.$$

5 СЕМИНАР: Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши

«Родители дали тебе жизнь, всё остальное в твоих руках».

Конфуций (551 г. до н. э. – 479 г. до н. э.) – древний мыслитель и философ Китая.

Знание производной $f'(x)$ функции $f(x)$ позволяет делать заключение и о поведении самой функции $f(x)$. Рассмотрим наиболее известные теоремы дифференциального исчисления.

5.1 Теорема Ферма́, или Необходимое условие локального экстремума

«Всё идёт хорошо, только мимо».

Михаил Жванецкий (1934–2020) – русский писатель-сатирик.

Теорема Ферма́.¹ Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и принимает в этой точке наибольшее (наименьшее) в рассматриваемой окрестности значение. Тогда если функция f имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, то эта производная равна нулю.

Замечание 1 (геометрический смысл). Касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси абсцисс.

Замечание 2. Обратное утверждение (если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует $f'(x_0) = 0$, то найдётся подокрестность точки x_0 , в которой функция достигает своего наименьшего или наибольшего значения), вообще говоря, не верно.

Пример 63. Например, функция $y = x^3$ имеет в точке $x = 0$ производную, равную нулю, однако не существует окрестности этой точки, в которой функция достигала

¹Пьер Ферма́, фр. *Pierre de Fermát* (1601–1665) – французский математик, по профессии – юрист. Математикой занимался в свободное время. Ферма́ – один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. С его именем, помимо данной теоремы, связаны ещё две теоремы: великая теорема Ферма́ (для любого натурального числа $n > 2$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z) и малая теорема Ферма́ (если p – простое число и n – целое число, не делящееся на p , то $n^{p-1} - 1$ делится на p).

бы своего наименьшего или наибольшего значения при $x = 0$. Позже будет доказано, что функция возрастает в этой точке.¹ $\square$

Замечание 3. У Исаака Ньютона этот факт упоминался как так называемый принцип остановки: «Когда величина есть наибольшая или наименьшая из всех возможных, то она в этот момент не течёт ни вперёд, ни назад».

Следствие. Если во внутренней точке x_0 своей области определения функция f имеет производную, причём $f'(x_0) \neq 0$, то не существует окрестности точки x_0 , в пределах которой функция f принимала бы наименьшее (наибольшее) значение при $x = x_0$.

5.2 Теорема Ролля, или Теорема о нуле производной

*«Жить нужно так, чтобы всегда искать новые знания,
и бояться их растерять».*

*Конфуций (551 г. до н. э. – 479 г. до н. э.) – древний
мыслитель и философ Китая.*

Теорема Ролля.² Пусть функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$, имеет конечную или бесконечную производную внутри этого сегмента и принимает на концах сегмента одинаковые значения, то на интервале (a, b) найдётся хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

Можно было привести следующую формулировку.

Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

- 1) $f \in C[a, b]$;
- 2) $\exists f'$ при $x \in (a, b)$;
- 3) $f(a) = f(b)$.

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Замечание (геометрический смысл). Теорема Ролля утверждает, что если ординаты обоих концов гладкой кривой равны, то на кривой найдётся точка, в которой касательная к кривой параллельна оси абсцисс.

Следствие. Если непрерывная функция обращается в нуль в n различных точках, то её производная обращается в нуль по крайней мере в $(n - 1)$ различных точках.

Пример 64. Показать, что функция $f(x) = x^2 - 3x + 2$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на сегменте $[1, 2]$, и найти точку $c \in [1, 2]$, в которой $f'(c) = 0$.

¹То есть обращение производной в нуль является необходимым, но не достаточным условием существования в точке локального экстремума.

²Мишель Ролль (фр. *Michel Rolle*, 1652–1719) – французский математик, член Парижской академии наук. Разработал метод отделения действительных корней алгебраических уравнений.

Решение. Функция $f(x) = x^2 - 3x + 2$ непрерывна на сегменте $[1, 2]$, дифференцируема внутри этого сегмента и принимает на его концах одинаковые значения $f(1) = f(2) = 0$. Тогда, по теореме Ролля, существует точка $c \in (1, 2)$, в которой $f'(c) = 2c - 3 = 0$, откуда находим $c = 3/2$. $\square$

5.3 Теорема Лагранжа, или Формула конечных приращений

Легенда. Однажды французского математика и механика Жозефа Луи Лагранжа кто-то спросил на музыкальном вечере, почему он любит музыку, и получил неожиданный ответ: *«Я люблю её потому, что она изолирует меня. Я слышу первые три такта; на четвёртом я ничего не различаю; я предаюсь своим мыслям, и ничто не отвлекает меня, именно таким образом я решил не одну трудную задачу»*.

Теорема Лагранжа (формула конечных приращений).¹ Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

- 1) f непрерывна на $[a, b]$;
- 2) f имеет конечную или бесконечную производную внутри этого сегмента.

Тогда существует точка $c \in (a, b)$, для которой выполняется равенство:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Замечание 1 (геометрический смысл теоремы). При выполнении условий теоремы внутри отрезка $[a, b]$ обязательно найдётся хотя бы одна точка c такая, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке $(c, f(c))$ параллельна хорде AB , где $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ (т. е. хорде, проходящей через точки графика, соответствующие концам отрезка).

Замечание 2. Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Следствия из теоремы Лагранжа.

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Если $f'(x) \equiv 0, \forall x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a, b]$ (условие постоянства функции на сегменте).

Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq a$, дифференцируема при $x > a$ и $f'(x) \equiv 0, \forall x > a$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a, +\infty)$.

¹Жозеф Луи Лагранж, фр. *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813) – французский математик и механик, почётный член Парижской и Петербургской академий. Ему принадлежат выдающиеся исследования по математическому анализу, по различным вопросам дифференциальных уравнений, по алгебре и теории чисел, механике, астрономии. Лагранж впервые ввёл в рассмотрение тройные интегралы, предложил обозначения для производной $y', f'(x)$.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) , $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$. Тогда $f(x) = g(x) + C$, где $C = \text{const}$.

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда, если $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ строго монотонно возрастает на (a, b) . Если же $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ строго монотонно убывает на (a, b) (условие монотонности функции).

Пример 65. Проверить, выполняется ли теорема Лагранжа для функции $f(x) = -x^2 + 2x$ на сегменте $[1, 3]$, и если да, то найти точку c .

Решение. Функция $f(x) = -x^2 + 2x$ непрерывна на сегменте $[1, 3]$ и дифференцируема на интервале $(1, 3)$, поэтому теорема Лагранжа применима, а значит, существует точка $c \in (1, 3)$, для которой выполняется условие:

$$f(3) - f(1) = f'(c)(3 - 1) \quad \Leftrightarrow \quad -3 - 1 = (-2c + 2) \cdot 2,$$

откуда находим $c = 2 \in (1, 3)$. $\square$

С помощью теоремы Лагранжа доказываются многие тождественные равенства и неравенства.

Пример 66. Доказать тождество

$$\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Решение. Функция $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ непрерывна на сегменте $[-1, 1]$ и дифференцируема внутри него, причём $f'(x) \equiv 0$, $x \in (-1, 1)$. Применяя следствие из теоремы Лагранжа о постоянстве функции с нулевой производной, получаем $f(x) \equiv \text{const}$. Для определения константы достаточно подставить в тождество какое-либо табличное значение, например $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, т. е. $f(x) \equiv \frac{\pi}{2}$. $\square$

Пример 67. Доказать, что при $x > 0$ верно неравенство

$$1 + 2 \ln x \leq x^2.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2 \ln x - 1$. Заметим, что $f(1) = 0$, и рассмотрим два случая.

1) При $x > 1$ имеем $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x} > 0$. Применяя теорему Лагранжа на сегменте $[1, x]$, получаем $f(x) - f(1) = f'(c)(x - 1) > 0$, откуда $f(x) > f(1)$, т. е. $x^2 > 1 + 2 \ln x$.

2) При $0 < x < 1$ имеем $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x} < 0$. Применяя теорему Лагранжа на сегменте $[x, 1]$, получаем $f(1) - f(x) = f'(c)(1 - x) < 0$, откуда опять получаем $f(x) > f(1)$, т. е. $x^2 > 1 + 2 \ln x$. $\square$

5.4 Теорема Коши, или Обобщённая формула конечных приращений

«Труднее всего человеку даётся то, что даётся не ему».

Михаил Жванецкий (1934–2020) — русский писатель-сатирик.

Теорема Коши (обобщённая формула конечных приращений).¹ Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

- 1) непрерывны на сегменте $[a, b]$;
 - 2) имеют конечную или бесконечную производную во всех внутренних точках этого сегмента;
 - 3) $g'(x) \neq 0$ на этом интервале,
- то на интервале (a, b) существует такая точка c , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Замечание 1. Обратим внимание, что в формулировке теоремы $g(b) \neq g(a)$, т. к. в противном случае, по теореме Ролля, $g'(x)$ в некоторой промежуточной точке была бы равна нулю, что противоречит условию.

Замечание 2. Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши. Для получения формулы конечных приращений из формулы Коши следует положить $g(x) = x$.

Замечание 3. Если дополнительно потребовать, чтобы $g(a) \neq g(b)$, то условие $g'(x) \neq 0$ можно заменить менее жёстким: $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ при $x \in (a, b)$ (производные не обращаются в нуль одновременно).

Пример 68. Объяснить, почему верна формула Коши для функций $f(x) = x^2 + x$ и $g(x) = x^3$ на сегменте $[-1, 1]$. Найти точку c .

Решение. Все условия теоремы Коши выполнены: функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на сегменте $[-1, 1]$, $g(-1) \neq g(1)$, дифференцируемы во всех внутренних точках этого сегмента и $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ при $x \in (-1, 1)$. Поэтому на интервале $(-1, 1)$ существует такая точка c , что имеет место равенство

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{2c + 1}{3c^2},$$

откуда находим $c_1 = -1/3$, $c_2 = 1 \notin (-1, 1)$. Итак, нашлась точка $c = -1/3$. □

¹Огюстён Коши́ (фр. *Augustin Louis Cauchy*, 1789–1857) — один из величайших учёных Франции, математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, почётный член Петербургской и многих других академий. Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в теорию дифференциальных уравнений, алгебру, геометрию, математическую физику и другие области математической науки. Один из основоположников механики сплошных сред.

5.5 Задачи для самостоятельного решения

Задачи на теорему Ролля:

№196. Показать, что функция $f(x) = x^2 - 3x + 2$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на сегменте $[1, 2]$ и найти точку $c \in (1, 2)$, в которой $f'(c) = 0$.

№197. [7, № 1236] Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но тем не менее $f'(x) \neq 0$ при $-1 \leq x \leq 1$. Объяснить кажущееся противоречие с теоремой Ролля.

№198. [7, № 1237] Функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в каждой точке конечного или бесконечного интервала (a, b) и

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

Доказать, что существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$ (обобщение теоремы Ролля на интервал).

№199. Проверить, выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x) = |x|$ на сегменте $[-1, 1]$.

№200. Проверить, выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x) = \sqrt[5]{(x-1)^2}$ на сегменте $[0, 2]$.

№201. Пусть $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Доказать, что все корни уравнения $f'(x) = 0$ принадлежат интервалу $(-3, 0)$.

№202. Уравнение нечётной степени $x^5 + x - 1 = 0$ имеет действительный корень. Показать, что он единственный.

№203. Пусть функция $f \in C[a, b]$ дифференцируема на (a, b) , причём $f(a) = f(b) = 0$. Доказать, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдётся такое число $x \in (a, b)$, что $\lambda f(x) + f'(x) = 0$.

Указание: применить теорему Ролля к функции $g(x) = e^{\lambda x} f(x)$.

№204. Пусть функция $f \in C[a, b]$ дифференцируема на (a, b) и $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$. Доказать, что уравнение $f(x)f'(x) = x$ имеет хотя бы один корень на интервале (a, b) .

№205. Пусть функция $f \in C^1[a, b]$ дважды дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b) = f'(a) = 0$. Доказать, что существует такая точка $x \in (a, b)$, что $f''(x) = 0$.

Указание: дважды последовательно применить теорему Ролля сначала к функции $f(x)$, а затем к её производной.

Задачи на теорему Лагранжа и её следствия:

№206. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и если всюду на этом интервале $f'(x) \equiv 0$, то функция $f(x)$ является постоянной на интервале (a, b) .

№207. Проверить, выполняется ли теорема Лагранжа для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на сегменте $[-1, 8]$, и если да, то найти точку c .

№208. Справедлива ли теорема Лагранжа для функции $f(x) = \sqrt{|x|}$ на сегменте: а) $[-1, 1]$, б) $[0, 1]$, и если да, то найти точку c .

№209. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$ на сегменте $[4, 5]$. Найти точку, в которой касательная параллельна хорде AB , где $A(4, f(4))$, $B(5, f(5))$.

№210. [7, № 1244] Найти на кривой $y = x^3$ точку, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1, -1)$ и $B(2, 8)$.

№211. На дуге кривой $f(x) = x^3 - x$ между точками $A(-2, -6)$ и $B(1, 0)$ найти точку $C(c, f(c))$, касательная в которой параллельна хорде AB .

№212. Привести пример такой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, что множество точек c , удовлетворяющих равенству $f(1) - f(0) = f'(c)$, состоит ровно из трёх точек, и изобразить её график.

№213. Функция $f(x)$ всюду непрерывна и дифференцируема. Показать, что если уравнение $f(x) = 0$ имеет два различных действительных корня, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет по крайней мере один действительный корень.

№214. Функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[2, 10]$ и дифференцируема внутри него. Известно, что $f(2) = 8$ и производная удовлетворяет условию $f'(x) \leq 4$ для всех $x \in (2, 10)$. Определить максимально возможное значение функции при $x = 10$.

№215. [7, № 1246.1] Пусть $f(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ и для любых действительных x и h справедливо тождество:

$$f(x+h) - f(x) \equiv h \cdot f'(x).$$

Доказать, что функция линейна, т. е. имеет вид $f(x) = ax + b$, где a и b — постоянные.

№216. [7, № 1250] Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) . Можно ли для всякой точки $\xi \in (a, b)$ указать две другие точки x_1 и x_2 из этого интервала такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)?$$

Рассмотреть пример $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$, $\xi = 0$.

№217. [7, № 1251(а,б)] Доказать неравенства:

$$\text{а) } |\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R});$$

$$\text{б) } p \cdot y^{p-1}(x - y) \leq x^p - y^p \leq p \cdot x^{p-1}(x - y) \quad (0 < y \leq x, p > 1).$$

№218. [7, № 1251(в,г)] Доказать неравенства:

$$\text{а) } |\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|; \quad \text{б) } \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \text{ если } 0 < b < a.$$

№219. Доказать неравенства:

$$\text{а) } \ln \frac{1+x^2}{1+y^2} \leq |x-y|, \quad \text{если } x, y \in \mathbb{R}; \quad \text{б) } \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{4}|x-y|, \quad \text{если } x, y \geq 1.$$

№220. [7, № 1255] Доказать, что если функция $f(x)$ имеет в конечном или бесконечном интервале (a, b) ограниченную производную $f'(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b) . Верно ли обратное утверждение для дифференцируемой функции f ?

№221. [7, № 1260] Доказать, что единственная функция $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), имеющая постоянную производную $f'(x) \equiv k$, есть линейная функция $f(x) = kx + b$.

№222. [7, № 1262] Доказать, что единственная функция $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), удовлетворяющая уравнению $y' = \lambda y$ ($\lambda = \text{const}$), есть показательная функция $y = C \cdot e^{\lambda x}$, где C – произвольная константа.

Указание: рассмотреть $(ye^{-\lambda x})'$.

№223. [7, № 1263] Проверить, что функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} \quad \text{и} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x$$

имеют одинаковые производные в областях: 1) $x < 1$ и 2) $x > 1$. Вывести зависимость между этими функциями.

№224. Доказать тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x \equiv \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

№225. [7, № 1264(a)] Доказать тождество

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \cdot \operatorname{sgn} x \quad \text{при } |x| \geq 1.$$

Указание: воспользоваться следствием 1 из теоремы Лагранжа (о постоянстве функции с нулевой производной).

№226. Доказать тождество (при $x \neq 0$)

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x^3) \equiv \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x} + \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn} x.$$

№227. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ верно неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha$, где $C > 0$ – постоянная и $\alpha > 1$. Доказать, что $f(x)$ постоянна на $[a, b]$.

№228. Доказать, что при $x \geq 0$ верно неравенство

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

Указание: ввести функцию $f(x) = \sqrt{1+x} - \frac{x}{2} - 1$ и применить к ней теорему Лагранжа на отрезке $[0, x]$.

№229. Доказать, что при $x \geq 0$ верно неравенство

$$e^x \geq 1 + x.$$

Указание: предварительно доказать с помощью теоремы Лагранжа неравенство $e^x > ex$.

№230. Доказать, что при $x \geq 0$ верно неравенство

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

№231. Определить, что больше: 100^{101} или 101^{100} .

Указание: логарифмируя, свести задачу к сравнению $101 \ln 100$ и $100 \ln 101$, т. е. $\frac{\ln 100}{100}$ и $\frac{\ln 101}{101}$, а затем ввести функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ и применить к ней теорему Лагранжа на отрезке $[100, 101]$.

№232. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[1, 2]$, причём $f(1) = 1$, $f(2) = 4$. Обязательно ли найдётся такая точка $c \in (1, 2)$, что $f'(c) = 3$? $f'(c) = 2$?

№233. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$, дифференцируема в интервале $(0, 1)$ и $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Доказать, что на интервале $(0, 1)$ существует такая точка c , что $f'(c) = \frac{\pi}{4}(1 + f^2(c))$.

№234. Доказать, что если функция f дифференцируема на сегменте $[1, 2]$, то существует такое число $c \in (1, 2)$, что

$$f(2) - f(1) = \frac{c^2}{2} f'(c).$$

№235. Доказать, что если функция f дифференцируема и не ограничена на конечном интервале (a, b) , то её производная $f'(x)$ также не ограничена на этом интервале. Обратное неверно (привести пример).

Задачи на теорему Коши:

№236. [7, № 1252] Объяснить, почему не верна формула Коши для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ на сегменте $[-1, 1]$.

№237. Объяснить, почему верна формула Коши для функций $f(x) = x^2 + x$ и $g(x) = x^3$ на сегменте $[-1, 1]$. Найти точку c .

№238. Записав формулу Коши для функций $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ и $g(x) = x^2 + 4$ на сегменте $[0, 2]$, найти значение c .

5.6 Ответы и решения

196. Функция $f(x)$ непрерывна на указанном сегменте, принимает на его концах равные значения $f(1) = f(2) = 0$ и дифференцируема внутри сегмента, поэтому по теореме Ролля на интервале $(1, 2)$ найдётся точка c такая, что $f'(c) = 0 \Leftrightarrow 2c - 3 = 0$, т. е. $c = \frac{3}{2}$.

197. Противоречия с теоремой Ролля нет, т. к. не выполнено одно из требований этой теоремы: функция $f(x)$ не имеет производной при $x = 0$. В самом деле,

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = +\infty, \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{-\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = -\infty,$$

т. е. $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

198. Докажем с помощью теоремы Ролля для сегмента.

1) Пусть интервал (a, b) конечен и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = C$, где $C = \text{const}$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in (a, b), \\ C, & \text{если } x = a, x = b, \end{cases}$$

непрерывную на $[a, b]$, причём $F(a) = F(b)$. По теореме Ролля на (a, b) найдётся точка c такая, что $F'(c) = f'(c) = 0$.

2) Если (a, b) – бесконечный интервал, то в силу существования конечной производной $f'(x)$, непрерывности функции $f(x)$ и существования конечных, равных между собой, её предельных значений при $x \rightarrow a + 0$ и $x \rightarrow b - 0$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ одна из прямых $y = C + \varepsilon$ или $y = C - \varepsilon$ пересечёт кривую $y = f(x)$ по меньшей мере в двух точках, абсциссы которых обозначим c_1 и c_2 . Для функции $f(x)$ на сегменте $[c_1, c_2]$ выполнены все условия теоремы Ролля, поэтому на (c_1, c_2) (а значит, и на (a, b)) найдётся такая точка c , что $f'(c) = 0$.

3) Рассмотрим случай, когда $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$. Тогда как в случае конечного, так и бесконечного интервала (a, b) , уравнение $f(x) = A$, где $A > 0$ – достаточно большое число (если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$) или $f(x) = -A$ (если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = -\infty$) имеет по крайней мере два разных корня, которые обозначим c_1 и c_2 . Применяя теорему Ролля к $f(x)$ на сегменте $[c_1, c_2]$, приходим к выводу, что на интервале (c_1, c_2) (а значит, и на (a, b)) найдётся хотя бы одна точка c : $f'(c) = 0$.

199. Нет, т. к. нет дифференцируемости функции в точке $x = 0$.

200. Данная функция является непрерывной на указанном сегменте, причём $f(0) = f(2) = 1$. Найдём производную: $f'(x) = (\sqrt[5]{(x-1)^2})' = \frac{2}{5\sqrt[5]{(x-1)^3}}$

($x \neq 1$). В точке $x = 1$ производную найдём по определению:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[5]{|x-1|^2}}{|x-1|} \cdot \operatorname{sgn}(x-1) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{\sqrt[5]{|x-1|^3}} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } x \rightarrow 1 + 0, \\ -\infty, & \text{если } x \rightarrow 1 - 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, то функция не имеет производной в точке $x = 1$, и поэтому теорема Ролля не применима.

201. Имеем: $f(0) = f(-1) = f(-2) = f(-3) = 0$. Для каждого из отрезков $[-3, -2]$, $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ выполняются условия теоремы Ролля, следовательно, есть три точки, по одной на каждом из соответствующих интервалов, в которых производная обращается в нуль.

202. Обозначим $y = x^5 + x - 1$, тогда $y' = 5x^4 + 1 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Если бы данное уравнение имело ещё хотя бы один корень, то, согласно теореме Ролля, нашлась бы точка, в которой производная обратилась бы в нуль, а это невозможно.

203. Рассмотрим функцию $g(x) = e^{\lambda x} f(x)$, она непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $g(a) = g(b) = 0$. По теореме Ролля найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $g'(c) = 0$. Поскольку $g'(x) = e^{\lambda x} (\lambda f(x) + f'(x))$, то получаем $\lambda f(c) + f'(c) = 0$.

204. Рассмотрим функцию $g(x) = f^2(x) - x^2$, она непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $g(a) = g(b)$. По теореме Ролля найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $g'(c) = 0$. Поскольку $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2x$, то получаем $f(c)f'(c) = c$.

205. Рассмотрим функцию $f(x)$, она непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b) = 0$. По теореме Ролля найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$. Рассмотрим далее функцию $f'(x)$, она непрерывна на $[a, c]$, дифференцируема на (a, c) и $f'(a) = f'(c) = 0$. По теореме Ролля найдётся точка $\varepsilon \in (a, c)$ такая, что $f''(\varepsilon) = 0$.

206. Пусть x_0 — некоторая фиксированная точка интервала (a, b) , а x — любая точка этого интервала. Сегмент $[x_0, x]$ (или, соответственно, $[x, x_0]$) целиком принадлежит интервалу (a, b) . Поэтому функция $f(x)$ дифференцируема (а значит, и непрерывна) всюду на этом сегменте. По теореме Лагранжа внутри указанного сегмента найдётся точка c такая, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0). \quad (1)$$

По условию производная равна нулю всюду на интервале (a, b) . Значит, $f'(c) = 0$ и из формулы (1) получим, что $f(x) = f(x_0)$, т. е. значение функции $f(x)$ в любой точке x интервала (a, b) равно её значению в фиксированной

точке x_0 . Это и означает, что функция $f(x)$ постоянна всюду на интервале (a, b) .

207. Теорема Ланранжа применима на этом сегменте. В самом деле, функция непрерывна на $[-1, 8]$, её производная $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, очевидно, существует во всех точках интервала $(-1, 8)$, отличных от 0. Проверим, используя определение производной, существование $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty,$$

т. е. производная существует. Выпишем формулу конечных приращений:

$$f(8) - f(-1) = f'(c)(8 - (-1)) \quad \Leftrightarrow \quad 2 + 1 = \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}} \cdot 9,$$

откуда $c = \pm 1$. Интервалу $(-1, 8)$ принадлежит $c = 1$.

208. а) Нет, теорема не применима, так как в точке $x = 0$ функция не имеет производной. Достаточно показать, что в этой точке односторонние производные не равны. Найдём их по определению:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{-x}}{-(-x)} = -\infty,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$$

б) Теорема выполняется для функции $f(x) = \sqrt{x}$ (функция непрерывна на $[0, 1]$ и дифференцируема на $(0, 1)$). Применяя её, получаем

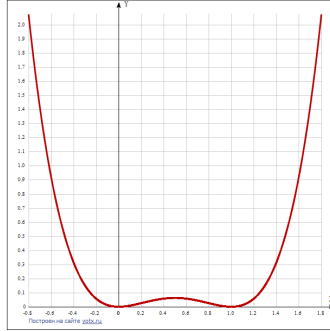
$$f(1) - f(0) = f'(c)(1 - 0) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 0 = \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot (1 - 0),$$

откуда находим $c = \frac{1}{4} \in (0, 1)$.

209. Данная функция имеет разрыв при $x = 3$, но на сегменте $[4, 5]$ она непрерывна и дифференцируема внутри него. Следовательно, здесь применима теорема Лагранжа. Так как $f'(x) = -\frac{2}{(x-3)^2}$, то имеем

$$f(5) - f(4) = f'(c)(5 - 4) \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 3 = -\frac{2}{(c-3)^2},$$

откуда находим $c = 3 + \sqrt{2} \in (4, 5)$.

Рис. 3: Кривая $y = x^2(x - 1)^2$.

210. По формуле конечных приращений (которая применима, поскольку $y = x^3$ непрерывна на $[-1, 2]$ и дифференцируема внутри этого сегмента) на интервале $(-1, 2)$ найдётся точка c :

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = f'(c) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8 - (-1)}{3} = 3c^2,$$

откуда $c = \pm 1$ и получаем две точки $A(-1, -1)$ и $B(1, 1)$, из которых только вторая, строго говоря, отвечает условиям теоремы (абсцисса попадает в нужный интервал). Однако если принять во внимание, что функция $y = x^3$ определена и дифференцируема всюду, то в первой из точек касательная также будет параллельна хорде (убедитесь в этом графически).

211. Согласно геометрическому смыслу теоремы Лагранжа, абсцисса точки c удовлетворяет условию

$$f(1) - f(-2) = f'(c)(1 - (-2)) \quad \Leftrightarrow \quad 0 - (-6) = (3c^2 - 1) \cdot 3,$$

откуда находим $c = \pm 1$. По условию теоремы Лагранжа $c \in (-2, 1)$, поэтому подходит только $c = -1$, тогда $f(c) = 0$. Проиллюстрируйте ситуацию на рисунке. Ответ: $C(-1, 0)$.

212. Например, $f(x) = x^2(x - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$ (Рис. 3).

213. Обозначим корни уравнения $f(x) = 0$ через a и b . В соответствие с условием, функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема внутри него. Следовательно, к ней применима формула Лагранжа и найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Поскольку $f(a) = f(b) = 0$, то $f'(c) = \frac{0 - 0}{b - a} = 0$. Таким образом, уравнение $f'(x) = 0$ имеет по крайней мере один корень.

Подчеркнём, что у производной может быть более одного нуля (например, можно рассмотреть функцию $f(x) = \sin x$ на сегменте $[0, 2\pi]$, где производная имеет два нуля). Теорема Лагранжа позволяет доказать существование по меньшей мере одного нуля.

Ясно, что рассмотренную схему можно обобщить на случай n нулей и производной $(n - 1)$ -го порядка. Если уравнение $f(x) = 0$ имеет три действительных корня, то первая производная будет иметь (по крайней мере) два нуля, а вторая производная – соответственно, не менее одного нуля. В общем случае, если функция имеет n действительных нулей, то производная $(n - 1)$ -го порядка будет иметь не менее 1 нуля.

214. Для оценки значения $f(10)$ воспользуемся формулой Лагранжа

$$f(10) - f(2) = f'(c)(10 - 2), \quad \text{где } c \in (2, 10).$$

Перепишем в виде $f(10) = f(2) + 8f'(c) \leq 8 + 8 \cdot 4 = 40$. Таким образом, максимально возможное значение функции на правом конце интервала равно 40.

215. Полагая $x = 0$ в тождестве $f(x + h) - f(x) \equiv h \cdot f'(x)$, получаем тождество $f(h) - f(0) \equiv h \cdot f'(0)$, верное при всех $h \in (-\infty, +\infty)$. Переобозначая в полученном равенстве h на x (в принципе, делать это не обязательно) и вводя обозначения $f'(0) = a$, $f(0) = b$, получаем $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$.

216. Вообще говоря, нет. Например, если на (a, b) функция $f(x)$ возрастает, то для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x_2$, имеем $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ и тогда для тех точек интервала, в которых $f'(\xi) = 0$, равенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0$$

невозможно. В частности, для функции $y = x^3$ для любых $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ имеем

$$\frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 > 0,$$

следовательно, для точки $\xi = 0$ значений x_1 и x_2 из условий задачи не существует.

217. а) При $x = y$ неравенство, очевидно, выполняется. При $x < y$ функция $y = \sin t$ непрерывна на отрезке $[x, y]$ и дифференцируема внутри него, поэтому по теореме Лагранжа между точками x и y найдётся точка c :

$$\sin x - \sin y = (x - y) \cdot \cos c,$$

откуда $|\sin x - \sin y| = |x - y| \cdot |\cos c| \leq |x - y|$. При $x > y$ доказательство проводится аналогично на отрезке $[y, x]$. В силу произвольного выбора точек x и y неравенство доказано при любых $x, y \in \mathbb{R}$.

б) При $x = y$ неравенство, очевидно, выполняется. Пусть $y < x$. Функция $f(t) = t^p$ при $p > 1$ и $t > 0$ непрерывна и дифференцируема, поэтому по теореме Лагранжа между точками y и x найдётся точка c :

$$x^p - y^p = pc^{p-1}(x - y), \quad \text{где } y < c < x.$$

Поскольку производная $f'(t) = pt^{p-1}$ возрастает при $p > 1$, $t > 0$ (т. к. $f''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$), то $p \cdot y^{p-1} < p \cdot c^{p-1} < p \cdot x^{p-1}$, и тогда, умножая последнее неравенство на $x - y (> 0)$, получаем неравенство

$$p \cdot y^{p-1}(x - y) < x^p - y^p < p \cdot x^{p-1}(x - y).$$

218. а) Так как функция $y = \operatorname{arctg} x$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на любом сегменте $[a, b]$, то найдётся $\xi \in (a, b)$:

$$\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \frac{1}{1 + \xi^2}(a - b),$$

откуда $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|$.

б) Так как функция $y = \ln x$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на любом сегменте $[b, a]$, то найдётся $\xi \in (b, a)$:

$$\ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a - b), \quad \text{откуда } \frac{a - b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a - b}{b}.$$

219. а) Воспользуемся теоремой Лагранжа для функции $f(t) = \ln(1 + t^2)$ на отрезке $[x, y]$ (или $[y, x]$):

$$\ln(1 + x^2) - \ln(1 + y^2) \leq |\ln(1 + x^2) - \ln(1 + y^2)| = |f'(c)||x - y| \leq |x - y|,$$

$$\text{т. к. } |f'(c)| = \left| \frac{2c}{1 + c^2} \right| \leq 1.$$

б) Аналогично, $\exists c > 1$:

$$\ln(1 + \sqrt{x}) - \ln(1 + \sqrt{y}) \leq |\ln(1 + \sqrt{x}) - \ln(1 + \sqrt{y})| = |f'(c)||x - y| \leq \frac{1}{4}|x - y|,$$

$$\text{т. к. } f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}(1 + \sqrt{c})} = \frac{1}{2(c + \sqrt{c})} \leq \frac{1}{4\sqrt{c}} \leq \frac{1}{4}.$$

220. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на интервале (a, b) , если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon, a, b) > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. По формуле Лагранжа для любой пары точек $x', x'' \in (a, b)$ имеем

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(c)||x' - x''| \leq M|x' - x''|$$

(т. к. $|f'(x)| \leq M$). Фиксируем любое $\varepsilon > 0$ и выберем $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда при $|x' - x''| < \delta$ имеем $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, т. е. $f(x)$ – равномерно непрерывна на (a, b) .

Обратное утверждение неверно: рассмотрите $f(x) = \sqrt{x}$ на $(0, 1)$.

221. Если $f(x) = kx + b$, то $f'(x) = k$. Докажем, что функция $f(x) = kx + b$ – единственная. От противного, допустим, что существует функция $\varphi(x)$, отличная от линейной и такая, что $\varphi'(x) = k$. Рассмотрим функцию $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$, тогда $\psi'(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, согласно следствию 1 из теоремы Лагранжа $\psi(x) = C = \text{const}$ при $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(x) = f(x) + C = kx + b + C$ – линейная функция. Противоречие с предположением.

222. Найдём производную $(ye^{-\lambda x})' = y'e^{-\lambda x} + ye^{-\lambda x}(-\lambda) = e^{-\lambda x}(y' - \lambda y) \equiv 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. То есть уравнение $y' = \lambda y$ равносильно тому, что $(ye^{-\lambda x})' \equiv 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. По следствию 1 из теоремы Лагранжа получаем, что $ye^{-\lambda x} \equiv C$, $x \in \mathbb{R}$ (C – произвольная константа). Выражая y , окончательно находим $y = C \cdot e^{\lambda x}$.

223. Равенство производных устанавливается непосредственным дифференцированием. Так как $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \text{const}$, т. е.

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} C_1, & \text{если } x < 1, \\ C_2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

При $x = 0$ имеем $f(0) - g(0) = \frac{\pi}{4}$, следовательно, $C_1 = \frac{\pi}{4}$. При $x = 2$ имеем $f(2) - g(2) = \arctg(-3) - \arctg 2 = -(\arctg 3 + \arctg 2)$. Так как $\frac{\pi}{4} < \arctg 3 < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} < \arctg 2 < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \arctg 3 + \arctg 2 < \pi$. При этом $\text{tg}(\arctg 3 + \arctg 2) = -1$, поэтому $\arctg 3 + \arctg 2 = \frac{3\pi}{4}$. Значит, $C_2 = -\frac{3\pi}{4}$.

224. Поскольку для функции $f(x) = \arctg x + \text{arccctg } x$ имеем $f'(x) \equiv 0$ на произвольном сегменте, то по следствию из теоремы Лагранжа о постоянстве функции с нулевой производной получаем $f(x) \equiv \text{const}$, $x \in \mathbb{R}$. Для определения константы достаточно подставить в функцию какое-либо табличное значение, например $f(0) = \arctg 0 + \text{arccctg } 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

225. Найдём производную функции из левой части тождества:

$$\begin{aligned} \left(2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \right)' &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{2x}{1+x^2})^2}} \cdot 2 \cdot \frac{1+x^2-2x^3}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} \equiv 0 \end{aligned}$$

при $|x| > 1$. Отсюда, т. к. функция $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ непрерывна при $|x| \geq 1$, то по следствию 1 из теоремы Лагранжа получаем, что

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} C_1, & \text{если } x \geq 1, \\ C_2, & \text{если } x \leq -1. \end{cases}$$

Найдём константы C_1 и C_2 . Так как функция $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ непрерывна при $x \leq -1$ и при $x \geq 1$, то полагая $x = 1$, находим $C_1 = \pi$, а полагая $x = -1$, определяем $C_2 = -\pi$. Поэтому окончательно имеем

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \cdot \operatorname{sgn} x \quad \text{при } |x| \geq 1.$$

226. Указание: воспользоваться следствием 1 из теоремы Лагранжа (о постоянстве функции с нулевой производной). См. решение предыдущей задачи.

227. Достаточно показать, что $f'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b]$. В самом деле, по определению производной в произвольной точке x_0

$$|f'(x_0)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x - x_0|^\alpha}{|x - x_0|} = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{\alpha-1} = 0.$$

228. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{1+x} - \frac{x}{2} - 1$ на сегменте $[0, x]$, где $x > 0$. Оценим производную этой функции: $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+x}) \leq 0$ при $x \geq 0$. Применяя теорему Лагранжа, получим, что $\exists c \in (0, x)$ такая, что

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \leq 0, \quad \text{откуда } f(x) \leq f(0),$$

т. е. $\sqrt{1+x} - \frac{x}{2} - 1 \leq 0$, или $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$, что и требовалось доказать.

229. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - x - 1$ на сегменте $[0, x]$, где $x > 0$. Оценим производную этой функции: $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$ при $x \geq 0$. Применяя теорему Лагранжа, получим, что найдётся точка $c \in (0, x)$ такая, что

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \geq 0, \quad \text{откуда } f(x) \geq f(0),$$

т. е. $e^x - x - 1 \geq 0$, или $e^x \geq 1 + x$, что и требовалось доказать.

230. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$ на сегменте $[0, x]$, где $x > 0$. Оценим производную этой функции: $f'(x) = e^x - x - 1 \geq 0$ при $x \geq 0$ (в силу предыдущей задачи). Применяя теорему Лагранжа, получим, что найдётся точка $c \in (0, x)$ такая, что

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \geq 0, \quad \text{откуда } f(x) \geq f(0),$$

т. е. $e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 \geq 0$, или $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$, что и требовалось доказать.

231. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ на сегменте $[100, 101]$. Оценим производную этой функции: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ при $x > e$. Применяя теорему Лагранжа, получим, что найдётся точка $c \in (100, 101)$ такая, что

$$f(101) - f(100) = f'(c)(101 - 100) < 0, \quad \text{откуда } f(101) < f(100),$$

т. е. $\frac{\ln 101}{101} < \frac{\ln 100}{100}$, или $101^{100} < 100^{101}$, что и требовалось доказать.

232. Функция f удовлетворяет на сегменте $[1, 2]$ условиям теоремы Лагранжа. Применяя теорему, получаем: $f(2) - f(1) = f'(c)(2 - 1)$, т. е. $4 - 1 = f'(c)$. Итак, ответ на первый вопрос положителен, а на второй – нет.

233. Применим теорему Лагранжа к функции $g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$ на отрезке $[0, 1]$: найдётся точка $c \in (0, 1)$: $f'(c) = 0$, т. е.

$$\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{f'(c)}{1 + f^2(c)}(1 - 0),$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

234. Рассмотрим функцию $h(x) = f(\frac{1}{x})$, определённую на сегменте $[\frac{1}{2}, 1]$. Применяя для этой дифференцируемой функции теорему Лагранжа, получаем, что найдётся такая точка $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$, что справедливо соотношение $h(1) - h(\frac{1}{2}) = h'(\xi)(1 - \frac{1}{2})$. Принимая во внимание, что $h'(\xi) = f'(\frac{1}{\xi}) \cdot (-\frac{1}{\xi^2})$ и обозначая $c = \frac{1}{\xi}$, перепишем соотношение в виде

$$f(1) - f(2) = f'(c) \cdot (-c^2)\frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad f(2) - f(1) = \frac{c^2}{2} f'(c).$$

235. От противного: предположим, что производная ограничена, т. е. существует константа $C > 0$ такая, что $\forall x \in (a, b)$ выполняется $|f'(x)| \leq C$. Тогда по теореме Лагранжа для всех $x_1, x_2 \in (a, b)$ выполняется $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)||x_1 - x_2| \leq C|x_1 - x_2|$. Выбирая в качестве $x_1 = x$ – произвольную точку интервала, а в качестве $x_2 = \frac{a+b}{2}$ – его середину, получаем $|f(x) - f(\frac{a+b}{2})| \leq \frac{C(b-a)}{2}$, откуда $|f(x)| \leq \frac{C(b-a)}{2} + |f(\frac{a+b}{2})|$, что означает ограниченность функции. Противоречие.

Пример функции, подтверждающий, что обратное утверждение неверно: $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in [-1, 1]$.

236. Нарушено условие теоремы Коши $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ при всех $x \in (-1, 1)$. В точке $x = 0$ имеем $(f'(0))^2 + (g'(0))^2 = 0$, следовательно, формула Коши не применима (или $g'(x) = 0$ при $x = 0$).

237. Все условия теоремы Коши выполнены: $g(-1) \neq g(1)$, $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ при $\forall x \in (-1, 1)$. Здесь $c = -\frac{1}{3}$, т. к.

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{2 - 0}{1 - (-1)} = \frac{2}{2} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{2c + 1}{3c^2},$$

откуда $c_1 = -1/3$, $c_2 = 1 \notin (-1, 1)$.

238. Данные функции определены и непрерывны на сегменте $[0, 2]$ и дифференцируемы на интервале $(0, 2)$, причём $f'(x) = 6x^2 + 5$, $g'(x) = 2x$. При этом $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (0, 2)$. Тогда по теореме Коши $\exists c \in (0, 2)$: имеет место формула Коши

$$\frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ т. е. } \frac{13}{2} = \frac{6c^2 + 5}{2c}, \quad \text{откуда находим } c = \frac{1}{2} \text{ или } c = \frac{5}{3}.$$

6 СЕМИНАР: Раскрытие неопределённостей. Правила Лопиталья

*«Если все люди поумнеют, то ими нельзя будет манипулировать.
Люди не хотят быть манипулируемыми,
когда у них есть знания».*

Герман Греф, председатель правления Сбера, 2017.

6.1 Первое правило Лопиталья: раскрытие неопределённостей вида $\frac{0}{0}$

Рассмотрим задачу вычисления предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (функция $g(x)$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности точки x_0), то говорят, что в точке $x = x_0$ имеется *неопределённость вида $\frac{0}{0}$* . В этом случае данный предел может как не существовать, так и существовать и принимать любое значение (конечное или бесконечное). Вычисление предела в этом случае принято называть *раскрытием неопределённости*.¹

Ранее мы уже рассматривали различные приёмы раскрытия неопределённостей указанного вида. Теперь познакомимся ещё с одним популярным у студентов способом раскрытия двух основных видов неопределённостей при вычислении пределов функций, имеющих производные в окрестности предельной точки. Этот способ известен в анализе под названием *правила Лопиталья*.

Приведённые ниже теоремы принадлежат Лопиталью и Бернулли. Правила Бернулли–Лопиталья – это метод нахождения пределов функций, раскрывающий неопределённости вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Обосновывающая метод теорема утверждает, что при некоторых условиях предел отношения функций равен пределу отношения их производных².

¹Раскрытие неопределённостей — методы вычисления пределов функций, заданных формулами, которые в результате формальной подстановки в них предельных значений аргумента теряют смысл, т. е. переходят в выражения типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, ∞^0 и др., по которым невозможно судить о том, существуют или нет искомые пределы, не говоря уже о нахождении их значений, если они существуют.

²Гийом Франсуа Лопиталь (фр. *Guillaume Francois Antoine*, marquis de L'Hospital, 1661–1704) – французский математик, автор первого учебника по математическому анализу. Способ раскрытия такого рода неопределённостей был опубликован в учебнике «Analyse des Infiniment Petits» 1696 года за авторством Гийома Лопиталья. Сын богатых родителей, мар-

Теорема 1 (*1-е правило Лопиталья*). Пусть: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки x_0 ($0 < |x - x_0| < \delta$ или $|x| > \frac{1}{\delta}$), где x_0 – число или символ ∞ , и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$;

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности точки x_0 , за исключением, быть может, самой точки x_0 , причём одновременно не обращаются в нуль при $x \neq x_0$: $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$;

3) существует конечный или бесконечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Рассмотрим примеры.¹

Пример 69. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}$.

Решение. Убедимся, что все условия 1-го правила Лопиталья выполнены. В самом деле,

1) функции $f(x) = x^x - 1$ и $g(x) = \ln x$ определены и непрерывны в достаточно малой проколотой окрестности точки $x = 1$, и $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$;

2) производные $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$ и $g'(x) = \frac{1}{x}$ существуют в этой окрестности и одновременно не обращаются в нуль $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$;

3) существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(\ln x + 1)}{\frac{1}{x}} = 1$.

Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x} \stackrel{[Л]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1. \quad \square$$

Пример 70. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 2x^5 + 1}{x^{15} - 2x^6 + 1}$.

киз Лопиталь поступил сперва в военную службу, но по слабости зрения вскоре оставил её и посвятил себя наукам. Состоял членом Парижской академии наук, участник учёного кружка Мальбранша. Был женат на Мари-Шарлотт де Ромий де ла Шенелэ (фр. *Marie-Charlotte de Romilly de la Chesnelaye*), тоже занимавшейся математикой. В 1690-х годах занял видное место в школе Лейбница, с новым методом которого его познакомил Иоганн Бернулли (*Johann Bernoulli*, швейцарский математик, 1687-1759) в 1692 во время своего пребывания в Париже в поместье Лопиталья.

Главная заслуга Лопиталья заключается в первом систематическом изложении математического анализа, данное им в сочинении «Анализ бесконечно малых» (1696). В этой книге собраны и приведены в стройное целое отдельные вопросы, разбросанные до того в разных изданиях, а также приводится Правило Лопиталья. В предисловии Лопиталь указывает, что без всякого стеснения пользовался открытиями Лейбница и братьев Бернулли и «не имеет ничего против того, чтобы они предъявили свои авторские права на всё, что им угодно». Современников, однако, сильно озадачило то, что Иоганн Бернулли предъявил претензии на всё сочинение Лопиталья целиком.

¹Буква «л» над знаком равенства $\stackrel{[Л]}{=}$ означает применение правила Лопиталья.

Решение. Убедившись, что имеем неопределённость $\frac{0}{0}$ и проверив, что все условия теоремы выполняются, применим 1-е правило Лопиталья:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 2x^5 + 1}{x^{15} - 2x^6 + 1} &\stackrel{[Л]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{10} - 2x^5 + 1)'}{(x^{15} - 2x^6 + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x^9 - 10x^4}{15x^{14} - 12x^5} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x^5 - 10}{15x^{10} - 12x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0}{3} = 0. \square\end{aligned}$$

Пример 71. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

Решение. Предел легко вычисляется однократным применением правила Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \stackrel{[Л]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x(1+x)} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}. \square$$

6.2 Второе правило Лопиталья: раскрытие неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$

«Попугайчик Анатолия Вассермана обезоружил своим интеллектом двух ветеринаров».

Из анекдотов про интеллект. Вассерман – российский журналист, публицист, телеведущий, политический консультант, участник и многократный победитель интеллектуальных телеигр. Депутат Государственной Думы Федерального собрания Российской Федерации VIII созыва с 2021 года.

Теорема 2 (2-е правило Лопиталья). Пусть: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки x_0 , и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$;

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности точки x_0 , за исключением, быть может, самой точки x_0 , причём одновременно не обращаются в нуль в этой окрестности (при $x \neq x_0$);

3) существует конечный или бесконечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичные правила справедливы и для односторонних пределов.

Пример 72. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Решение. Убедившись, что 2-е правило Лопиталья применимо, используем его:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0. \quad \square$$

Замечание 1. Правила Лопиталья являются лишь достаточным условием для существования предела отношения двух бесконечно малых (бесконечно больших) функций, поэтому если предел отношения производных не существует или нарушается какое-либо другое условие применимости этих правил, то это, вообще говоря, ещё не означает, что нет предела отношения исходных величин. Проиллюстрируем это примерами.

Пример 73. Исследовать возможность применения правила Лопиталья к пределу

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}.$$

Решение. Рассмотрим при $x \rightarrow \infty$ две бесконечно большие функции: $f(x) = x + \sin x$ и $g(x) = x$. Предел их отношения, очевидно, существует:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \cdot \sin x \right) = 1 + 0 = 1.$$

В то же время отношение производных даёт

$$\frac{(x + \sin x)'}{x'} = \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x,$$

а эта функция не имеет предела при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, для вычисления данного предела правило Лопиталья не применимо. $\square$

Пример 74. [7, № 1374(г)] Исследовать возможность применения правила Лопиталья к пределу

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + \sin x \cdot \cos x}{(x + \sin x \cdot \cos x)e^{\sin x}}.$$

Решение. Формальное применение правила Лопиталья даёт результат, равный 0. В действительности же, этот предел не существует, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{1 + \sin x \cdot \cos x}{x}}{1 + \frac{\sin x \cdot \cos x}{x}} \right) e^{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\sin x}.$$

Здесь выражение в скобках стремится к единице, а выражение $e^{\sin x}$ представляет собой отличную от постоянной периодическую функцию и, следовательно, не имеет предела при $x \rightarrow \infty$. Причина этого противоречия кроется в том, что правило

Лопиталья применять было нельзя, поскольку нарушается условие одновременного необращения в нуль производных при $x \rightarrow \infty$. Действительно,

$$f'(x) = 2 \cos^2 x, \quad g'(x) = \cos x (2 \cos x e^{\sin x} + (x + \sin x \cos x) e^{\sin x}),$$

и при $\cos x = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), получаем $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 = 0$. $\square$

Замечание 2. Правила Лопиталья иногда приходится применять несколько раз подряд, пока не получится предел, значение которого либо очевидно, либо может быть вычислено каким-либо известным способом.

Пример 75. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Решение. Для раскрытия неопределённости $\frac{0}{0}$ воспользуемся правилом Лопиталья последовательно три раза – до тех пор, пока не пропадёт неопределённость:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \stackrel{[Л]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \stackrel{[Л]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} \stackrel{[Л]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}. \quad \square$$

Пример 76. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x - 2\sqrt{1+x}}{x^2}$.

Решение. Воспользуемся правилом Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x - 2\sqrt{1+x}}{x^2} \stackrel{[Л]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}}{2x} \stackrel{[Л]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + \frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}}{2} = \frac{5}{4}. \quad \square$$

Замечание 3. Признавая несомненные достоинства правил Лопиталья, всё же отметим, что этот метод, как и любой другой, не являются панацеей (наиболее эффективным) во всех случаях, когда применим. Встречаются задачи, приводящие при использовании этих правил к большому количеству рутинных вычислений. Рассмотрим такой пример.

Пример 77. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^5}$.

Решение. Очевидно, вычисление уже только первых двух производных приводит к большим выкладкам, а дифференцировать здесь нужно, по-видимому, 5 раз. В такой ситуации надо пользоваться другими, более удобными средствами вычисления пределов, например – разложениями функций по формуле Тейлора. $\square$

6.3 Другие виды неопределённостей: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 и способы их раскрытия

«Если тебе трудно сразу понять всю бесконечность, постарайся понять её хотя бы наполовину».

Славомир Врублевский (р. 1967) — современный польский афорист, происходит из старинного польского дворянского рода.

1. Неопределённости вида $0 \cdot \infty$, т. е. вычисление предела $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, x_0 — действительное число или символ бесконечности, сводятся либо к неопределённости $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

либо к неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Пример 78. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +0} x^\mu \ln x$ ($\mu > 0$).

Решение. Сведём неопределённость $0 \cdot \infty$ к неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^\mu \ln x \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\mu}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\mu \cdot x^{-\mu-1}} = -\frac{1}{\mu} \cdot \lim_{x \rightarrow +0} x^\mu = 0.$$

Пример 79. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \left((1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right)$.

Решение. Сведём неопределённость $0 \cdot \infty$ к неопределённости $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2}(1-x) \right)} =$$

$$(\text{т. к. } \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha \text{ при } \alpha \rightarrow 0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{2}{\pi}. \quad \square$$

2. Неопределённости вида $\infty - \infty$, т. е. вычисление предела $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ и x_0 — действительное число или символ бесконечности, в общем случае могут быть сведены к неопределёностям $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, например

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}.$$

Дроби часто приводят к общему знаменателю:

Пример 80. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$.

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) \stackrel{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \frac{1}{2}. \square$$

В случае с радикалами, как мы знаем, бывает эффективным домножение на сопряжённое выражение. Так, в следующем примере этот приём приводит к неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$:

Пример 81. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$.

Решение. Умножим и разделим на сопряжённое выражение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) &\stackrel{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\cancel{\sqrt{x}} \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}} + 1} = \frac{1}{2}. \square \end{aligned}$$

3. Неопределённости вида 1^∞ уже рассматривались ранее. Для раскрытия данного типа неопределённостей, в частности, применялся способ, позволяющий с помощью 2-го замечательного предела свести данный вид неопределённости к неопределённости $0 \cdot \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)}) \stackrel{[1^\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \left((1 + (f(x) - 1))^{\frac{1}{f(x)-1}} \right)^{(f(x)-1)g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)-1)g(x)}.$$

4. Неопределённости вида 0^0 , ∞^0 , 1^∞ сводятся в общем случае к неопределённости $0 \cdot \infty$ при помощи перехода к экспоненте в основании степени $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$.

Пример 82. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$.

Решение. Имеем $\lim_{x \rightarrow +0} x^x \stackrel{[0^0]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \stackrel{[\frac{0}{\infty}]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1. \square$

Пример 83. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} \stackrel{[\infty^0]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right) \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{[\frac{0}{\infty}]}{=} e^0 = 1. \square$

6.4 Задачи для самостоятельного решения

Используя 1-е правило Лопиталья, вычислить пределы с неопределённостями вида $\frac{0}{0}$:

№239. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^x};$

№240. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0);$

№241. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x};$

№242. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{4x^2};$

№243. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+x} - 3}{x-2};$

№244. [7, № 1330] $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1};$

№245. [7, № 1359] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$

Используя 2-е правило Лопиталья, вычислить пределы с неопределённостями вида $\frac{\infty}{\infty}$:

№246. [7, № 1336] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0);$

№247. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln \sqrt{x^2 + 1}};$

№248. [7, № 1322] $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x};$

№249. [7, № 1368(б)] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}.$

№250. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^4(ax))}{\ln(\sin^4(bx))},$ где $ab \neq 0$.

Используя 2-е правило Лопиталья, доказать, что показательная функция на бесконечности растёт быстрее, а логарифмическая – медленнее, чем степенная:

№251. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1, n > 0).$

№252. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^n} = 0 \quad (a > 1, n > 0).$

Комбинируя различные способы, раскрыть неопределённости разных видов, сведя к неопределённостям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, и вычислить пределы:

№253. [7, № 1340] $\lim_{x \rightarrow 1-0} (\ln x \cdot \ln(1-x));$

№254. $\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln^2 x);$

№255. $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x};$

№256. $\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^{\ln x};$

№257. $\lim_{x \rightarrow +0} (x + 2\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}};$

№258. $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{2x};$

№259. [7, № 1343] $\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x-1};$

№260. [7, № 1344] $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1);$

№261. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right);$

№262. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} - \frac{3}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \right);$

№263. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right);$

№264. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right);$

№265. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x);$

№266. [7, № 1356] $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right);$

№267. [7, № 1354] $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$

№268. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{\arcsin x} - \frac{1}{x} \right);$

№269. [7, № 1373(2)] Исследовать на дифференцируемость в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{если } x \neq 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

№270. При каком значении параметра a существует $f'(0)$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{\ln(1+x)}{x}, & \text{если } x > 0? \end{cases}$$

№271. Найти такие значения a и b , чтобы функция f была дифференцируемой на множестве $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{если } x \leq \frac{1}{e}, \\ x^2 \ln x, & \text{если } x > \frac{1}{e}. \end{cases}$$

№272. $\lim_{x \rightarrow +0} (x^\mu \ln x) \ (\mu > 0);$

№273. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) e^x;$

$$\text{№274. } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x;$$

$$\text{№275. } \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}};$$

$$\text{№276. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{№277. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x};$$

$$\text{№278. } [7, \text{№ 1351}] \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{№279. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$\text{№280. } [7, \text{№ 1363(г)}] \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$\text{№281. } [7, \text{№ 1364}] \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{№282. } [7, \text{№ 1348}] \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$\text{№283. } [7, \text{№ 1363(а)}] \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

№284. [7, № 1373] Доказать, что если для функции $f(x)$ существует $f''(x)$,

то

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Показать, что правила Лопиталя не применимы, и вычислить пределы без их использования:

$$\text{№285. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3 \sin x}{x + 4 \cos x};$$

$$\text{№286. } [7, \text{№ 1374(а)}] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x};$$

$$\text{№287. } [7, \text{№ 1374(б)}] \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$$

$$\text{№288. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x}};$$

$$\text{№289. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} + 2 \sin x}{x};$$

$$\text{№290. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ (пример проф. В.Н. Депутатова).}$$

№291. [7, № 1374(в)] Исследовать возможность применения правила Лопи-

таля:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x) + e^{-x^2} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)}.$$

№292. Исследовать возможность применения правила Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2x + \sin 2x}{(2x + \sin 2x)e^{\sin x}}.$$

6.5 Ответы и решения

$$239. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

$$240. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a}{1} = \ln a.$$

$$241. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

$$242. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{4x^2} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{8x} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \cos 3x}{8} = \frac{9}{8}.$$

$$243. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+x} - 3}{x - 2} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{7+x}}}{1} = \frac{1}{6}.$$

$$244. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$$

$$245. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e}{x} \stackrel{[I]}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} \cdot \left(\frac{1}{x} \ln(1+x) \right)' \right) = (\text{так как } e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e) =$$

$$= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} \cdot x - \ln(1+x)}{x^2} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x+1) \ln(1+x)}{x^2(x+1)} =$$

$$(\text{так как } x+1 \rightarrow 1) = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x+1) \ln(1+x)}{x^2} \stackrel{[I]}{=}$$

$$= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x} = -\frac{e}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = -\frac{e}{2}.$$

$$246. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon \cdot x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon \cdot x^\varepsilon} = 0.$$

$$247. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln \sqrt{x^2+1}} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1.$$

$$248. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} \stackrel{[\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} \stackrel{[I]}{=} - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3 \sin 3x} = -1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

$$249. \text{Имеем } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} \stackrel{[\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln^2 x}}{e^{x \ln \ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x - x \ln \ln x)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln^2 x}{x} - \ln \ln x \right)} = e^{-\infty} = 0,$$

так как $\frac{\ln^2 x}{x} \rightarrow 0$, $\ln \ln x \rightarrow +\infty$.

250. Применим 2-е правило Лопиталя несколько раз

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^4(ax))}{\ln(\sin^4(bx))} &\stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4(bx) \cdot 4 \sin^3(ax) \cdot \cos(ax) \cdot a}{\sin^4(ax) \cdot 4 \sin^3(bx) \cdot \cos(bx) \cdot b} = \\ &= \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(bx)}{\sin(ax)} \stackrel{[I]}{=} \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b \cos(bx)}{a \cos(ax)} = 1. \end{aligned}$$

251. Применим 2-е правило Лопиталя несколько раз

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} \stackrel{[I]}{=} \dots$$

– до тех пор, пока показатель степени у x в числителе не станет отрицательным, после этого неопределённость исчезает и становится очевидно, что предел равен нулю.

252. Применим один раз 2-е правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^n} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln a}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^n \ln a} = 0.$$

253. Имеем $\lim_{x \rightarrow 1-0} (\ln x \cdot \ln(1-x)) \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x)}{\ln^{-1} x} \stackrel{[\infty][I]}{=} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\frac{-1}{1-x}}{-\frac{1}{\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \cdot \ln^2 x}{1-x} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln^2 x + x \cdot (2 \ln x) \cdot \frac{1}{x}}{-1} = 0.$$

254. Имеем $\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln^2 x) \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{[\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2 \lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x) =$

$$-2 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{[I]}{=} -2 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

255. Имеем $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x} \stackrel{[0^0]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x \ln x)} \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} \stackrel{[I]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}} =$

$$= e^{-\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x}} = (\cos x \rightarrow 1) = e^{-\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x}} = (\sin x \sim x) = e^{-\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{x}} = e^0 = 1.$$

256. Имеем $\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^{\ln x} \stackrel{[0^0]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 1+0} \ln x \ln(x-1)} \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}} \stackrel{[I]}{=}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x(\ln x)^2}{x-1}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(\ln x)^2}{x-1}} \stackrel{[I]}{=} e^{-\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2 \ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

257. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x + 2\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{[0^0]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(x+2\sqrt{x})}{\ln x}} \stackrel{[I]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})}} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x}+1}{2+\sqrt{x}}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

258. Имеем $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{2x} \stackrel{[0^0]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +0} 2x \ln(\arcsin x)} = e^{2 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\arcsin x)}{\frac{1}{x}}} \stackrel{[I]}{=}$

$$= e^{2 \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-2 \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{\arcsin x} \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = e^{-2 \cdot 0 \cdot 1} = 1.$$

259. Имеем $\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x-1} \stackrel{[0^0]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +0} (x^x-1) \ln x} \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^x-1}{(\ln x)^{-1}}} \stackrel{[I]}{=}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^x(\ln x+1)}{-(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}}} = (x^x \rightarrow 1) = e^{-\lim_{x \rightarrow +0} (x(\ln x+1) \ln^2 x)} =$$

$$= e^{-\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln^3 x + x \ln^2 x)} = e^0 = 1,$$

так как $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^3 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -3 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{[I]}{=}$

$$= -3 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 6 \lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x) = 0.$$

260. 1-й способ. $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) \stackrel{[0^0]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} (e^{x^x \ln x} - 1) = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x^x \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \ln x} - 1 =$

(так как $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$, то показатель степени у экспоненты стремится к $-\infty$, неопределённость отсутствует, предел вычисляется однозначно и получаем) $= e^{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$.

2-й способ. Помимо минуса единицы данный предел имеет вид $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)^{g(x)}$, где $f(x) = x \rightarrow 0$, $g(x) = x^x \rightarrow 1$, здесь нет неопределённости, предел равен 0.

261. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right) \stackrel{[\infty - \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - (x + 2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{x^2 - 4} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}.$$

262. Сделаем замену $y = x - 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} - \frac{3}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{y^3 + 2y^2 + 2y} - \frac{3}{y^3 + 5y^2 + 6y} \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2y^2 - y}{y(y^2 + 2y + 2)(y^2 + 5y + 6)} = -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y + 1}{(y^2 + 2y + 2)(y^2 + 5y + 6)} = -\frac{1}{12}.$$

263. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &\stackrel{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \stackrel{[\text{Л}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \stackrel{[\text{Л}]}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0. \end{aligned}$$

264. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \stackrel{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2 - \ln x}{(x-1) \ln x} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \infty.$$

265. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \stackrel{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$, т. к. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

266. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) &\stackrel{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \stackrel{[\text{Л}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{x \cos x + \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{x \cos x + \sin x} \stackrel{[\text{Л}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x - x \sin x + \cos x} = 0. \end{aligned}$$

267. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \stackrel{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \stackrel{[\text{Л}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} \stackrel{[\text{Л}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + x e^x} = \frac{1}{2}.$$

268. Приведём выражение к общему знаменателю, трансформируя тем самым неопределённость $\infty - \infty$ в неопределённость $\frac{0}{0}$, и затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{\arcsin x} - \frac{1}{x} \right) \stackrel{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - \arcsin x}{x \arcsin x} \stackrel{[\text{Л}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{3}{0} = \infty.$$

269. Заметим, что функция непрерывна в точке $x = 0$, поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$ (см. предыдущую задачу). Далее, по определению производной в точке $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - x - x e^x}{2x^2(e^x - 1)} \stackrel{[\text{Л}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 1 - e^x - x e^x}{4x(e^x - 1) + 2x^2 e^x} \stackrel{[\text{Л}]}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x e^x}{4(e^x - 1) + 2x^2 e^x + 8x e^x} \stackrel{[\text{Л}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x - x e^x}{12e^x + 12x e^x + 2x^2 e^x} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция дифференцируема в точке $x = 0$ и $f'(0) = -\frac{1}{12}$.

270. Производная $f'(0)$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют и равны обе односторонние производные. Вычислим их:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{(1+ax) - 1}{x} = a,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, функция дифференцируема в точке $x = 0$ только при $a = -\frac{1}{2}$.

271. Условие дифференцируемости функции в точке $x = \frac{1}{e}$ имеет вид равенства в этой точке односторонних производных: $f'_-\left(\frac{1}{e}\right) = f'_+\left(\frac{1}{e}\right)$. Найдём эти производные:

$$f'_-\left(\frac{1}{e}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}-0} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{x - \frac{1}{e}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}-0} \frac{ax^2 + b - \frac{a}{e^2} - b}{x - \frac{1}{e}} \stackrel{[I]}{=} \frac{2a}{e}.$$

Прежде чем вычислить правую производную, заметим, что функция должна удовлетворять в точке $x = \frac{1}{e}$ условию непрерывности: $f\left(\frac{1}{e}-0\right) = f\left(\frac{1}{e}+0\right)$, т. е. $\frac{a}{e^2} + b = -\frac{1}{e^2}$. Тогда

$$f'_+\left(\frac{1}{e}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}+0} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{x - \frac{1}{e}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}+0} \frac{x^2 \ln x + \frac{1}{e^2}}{x - \frac{1}{e}} \stackrel{[I]}{=} -\frac{1}{e}.$$

Осталось решить систему уравнений и найти искомые a и b :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{e^2} + b = -\frac{1}{e^2}, \\ \frac{2a}{e} = -\frac{1}{e}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = -\frac{1}{2e^2}. \end{cases}$$

272. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x^\mu \ln x) \stackrel{[0, \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\mu}} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\mu x^{-\mu}} = 0.$$

273. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctg x) e^x \stackrel{[0, \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{e^{-x}} \stackrel{[I]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-2}{1+x^2}}{-e^{-x}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x^2} = +\infty.$$

$$\begin{aligned} \textbf{274.} \quad & \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x \stackrel{[\infty^0]}{=} e^A, \text{ где } A = \lim_{x \rightarrow +0} \left(x \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right) \stackrel{[0, \infty]}{=} \\ & = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \left(\ln \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{[\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\ln \frac{1}{x}} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\ln \frac{1}{x}} = 0. \end{aligned}$$

275. Имеем неопределённость вида $[\infty^0]$. Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow +0} \ln y = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \operatorname{ctg} x \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\ln x} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-x}{\cos x \sin x} = -1, \text{ следовательно, } \lim_{x \rightarrow +0} y = e^{-1}.$$

276. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}} \stackrel{[\infty^0]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2^x)}{x}} \stackrel{[I]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2^x \ln 2}{x+2^x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2^x} + \ln 2}{\frac{x}{2^x} + 1}} = e^{\ln 2} = 2.$$

277. Имеем $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} \stackrel{[\infty^0]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\cos x}}} \stackrel{[I]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}}{-\frac{\sin x}{\cos^2 x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}} = e^0 = 1.$$

278. Имеем $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} \stackrel{[\infty^0]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x}} \stackrel{[I]}{=}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi x}{2x+1} \right)'}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2}}{\sin \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos \frac{\pi x}{2x+1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}} \cdot \frac{2}{2x+1} \right)}.$$

Применяя тождество $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ при $\alpha = \frac{2\pi x}{2x+1}$, получим: $\sin \frac{2\pi x}{2x+1} = \sin \frac{\pi}{2x+1}$, поэтому $e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}} \cdot \frac{2}{2x+1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin \frac{\pi}{2x+1}} \cdot \frac{2}{2x+1} \right)} = e^{1 \cdot 0} = 1.$

279. Имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \stackrel{[1^\infty]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) \frac{1}{x^2}} =$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}} \stackrel{[I]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}} \stackrel{[I]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x}} \stackrel{[I]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

280. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \stackrel{[1^\infty]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^3}} \stackrel{[I]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2}} =$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x^2)}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

281. Имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}} \stackrel{[1^\infty]}{=} \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right) \right) =$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}} \stackrel{[I]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$282. \text{ Имеем } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} \stackrel{[1^\infty]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} 2x \ln(\operatorname{tg} x))} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg} 2x)^{-1}}} \stackrel{[JI]}{=}$$

$$\stackrel{[JI]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x} \cdot \frac{2}{\cos^2 2x}}} = (\text{так как } \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 2) = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (-\sin^2 2x)} = e^{-1}.$$

283. Пусть $t = \arcsin x \Rightarrow x = \sin t$, тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{\sin t} \right)^{\frac{1}{\sin^2 t}} \stackrel{[1^\infty]}{=} e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{t}{\sin t}}{\sin^2 t}} \stackrel{[JI]}{=} \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t}{t} \left(\frac{t}{\sin t} \right)'}{2 \sin t \cos t}} = e^{\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t \cos t}{t \sin^2 t}} \stackrel{[JI]}{=} e^{\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sin t}{\sin^2 t + 2t \sin t \cos t}} = \\ &= e^{\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t + 2t \cos t}} = e^{\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t} + 2 \cos t}} = e^{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

284. По правилу Лопиталя (x – параметр) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} &\stackrel{[I]}{=} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + f(x-h) - 2f(x))'_h}{(h^2)'_h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = \end{aligned}$$

(второй раз правило Лопиталя применять нельзя, поступим иначе)

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \right) = \frac{1}{2} (f''(x) + f''(x)) = f''(x).$$

Замечание. Двукратное применение правила Лопиталя здесь, вообще говоря, неправомерно, т. к. из того, что $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x , не вытекает, что $f(x)$ дважды дифференцируема в точках $x-h$ и $x+h$.

285. Здесь имеем неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, но предел отношения производных $\frac{2+3\cos x}{1-4\sin x}$ не существует, потому что не существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$. Предел можно вычислить так: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3\sin x}{x+4\cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+3\frac{\sin x}{x}}{1+4\frac{\cos x}{x}} = 2$.

286. Все условия применимости правила Лопиталя выполнены, кроме одного: не существует предел отношения производных:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}.$$

В то же время предел легко вычисляется:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

287. Предел легко вычисляется без правила Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$. А вот правило Лопиталя здесь не применимо, т. к. не су-

ществует предел отношения производных $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

288. В данном «искусственном» примере бездумное применение правила Лопиталя приводит к бесконечному повторению–зацикливанию:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x}} \stackrel{[Л]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^{2x}} \stackrel{[Л]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{4e^{2x}} \stackrel{[Л]}{=} \dots$$

С другой стороны, после сокращения дроби становится очевидно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

289. Вычисляя предел непосредственно, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} + 2 \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin x + 2 \frac{\sin x}{x} \right) = 2,$$

в то время как $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + 2 \cos x}{1}$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$.

290. Не существует. Формальное применение правила Лопиталя приводит к «зацикливанию»:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \stackrel{[Л]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \stackrel{[Л]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \stackrel{[Л]}{=} \dots$$

Задача решается следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \stackrel{[\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}.$$

Этот предел равен 1 при $x \rightarrow +\infty$, но он же равен (-1) при $x \rightarrow -\infty$, что противоречит единственности предела и доказывает его несуществование.

291. Не применимо. Здесь нарушено требование одновременного необращения в нуль производных при $x \rightarrow +\infty$. Как раз при $x = \pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 = 0$, так как $f'(x) = \sin x(-5e^{-2x} - 2x \sin x e^{-x^2} + 2 \cos x e^{-x^2})$, $g'(x) = \sin x(-2e^{-x})$.

292. Имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \rightarrow +\infty$. Применим формально правило Лопиталья:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 2 \cos 2x}{(2 + 2 \cos 2x)e^{\sin x} + (2x + \sin 2x)e^{\sin x} \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cos^2 x}{e^{\sin x}(4 \cos^2 x + (2x + \sin 2x) \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cos x}{e^{\sin x}(4 \cos x + 2x + \sin 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \frac{\cos x}{x}}{e^{\sin x} \left(1 + \frac{4 \cos x + \sin 2x}{x}\right)} = 0. \end{aligned}$$

Однако предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ не существует: рассмотрим две последовательности аргументов $\{x'_n\} = \{2\pi n\}$ и $\{x''_n\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right\}$. Тогда $x'_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, $x''_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$; при этом

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x'_n)}{g(x'_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4\pi n}{4\pi n} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x''_n)}{g(x''_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \pi + 4\pi n}{(\pi + 4\pi n) \cdot e} = \frac{1}{e}.$$

Правило Лопиталья здесь не применимо, поскольку одним из условий теоремы является условие отличия от нуля производной функции $g(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 ; в данном случае $g'(x)$ обращается в 0 в точках вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, которые есть в любой окрестности точки $+\infty$.

7 СЕМИНАР: Формула Тейлора

Илон Маск выразил опасение, что «...ИИ может стать “бессмертным диктатором”, от которого никто не убежит. История, по словам бизнесмена, знает таких диктаторов как Гитлер и Муссолини, но они были смертными, искусственный же интеллект создаст постоянную структуру угнетения».

Статья «В Google обратились к тёмной стороне искусственного интеллекта», 2020 г.

В России необходимо массово внедрить искусственный интеллект в различные сферы жизнедеятельности. Это внедрение должно охватить все отрасли экономики, социальной сферы и систему госуправления».

Президент России Владимир Путин на международной конференции «Путешествие в мир искусственного интеллекта» (организатор — Сбер), 24 ноября 2022 года.

7.1 Понятие многочлена Тейлора, остаточного члена

Рассмотрим вопрос о приближении функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 алгебраическим многочленом n -ой степени $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$. Естественно предположить, что чем больше производных, включая производную нулевого порядка, совпадают у двух функций в некоторой точке, тем лучше эти функции аппроксимируют друг друга в окрестности этой точки. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что любой многочлен $P_n(x)$ в произвольной точке x представим в виде разложения по целым неотрицательным степеням $(x - x_0)$:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Если дана функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 все производные до порядка n включительно, то всегда можно выписать многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (1)$$

производные которого до порядка n включительно в точке x_0 совпадают с производными соответствующего порядка функции $f(x)$ в точке x_0 . Алгебраический многочлен, заданный соотношением (1), называется *многочленом*

Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке x_0 . Многочлен назван в честь Брука Тейлора.¹

Обозначим через $R_n(x_0, x) = f(x) - P_n(x)$ величину уклонения многочлена $P_n(x)$ от функции $f(x)$ в точке x_0 . Она называется n -ым *остатком*, или n -ым *остаточным членом*, формулы Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + R_n(x_0, x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x_0, x). \quad (2)$$

Величина остаточного члена определяет точность аппроксимации функции $f(x)$ в окрестности x_0 . Отметим, что формулу Тейлора при $x_0 = 0$ часто называют *формулой Маклорена*².

7.2 Локальная формула Тейлора. Формы остаточного члена

Формула Тейлора используется при доказательстве большого числа теорем в дифференциальном исчислении. По формуле Тейлора можно раскладывать функции как одной, так и нескольких переменных.³ В следующей теореме приведены условия, достаточные для того, чтобы функцию одной действительной переменной можно было приблизить в окрестности заданной точки многочленом Тейлора (с определённой точностью).

Теорема 1 (*локальная формула Тейлора*). Пусть: 1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 ; 2) $f(x)$ имеет в этой окрестности производные до $(n - 1)$ -го порядка включительно: $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; 3) в точке x_0 существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$. Тогда всюду в указанной окрестности справедливо представление (2).

Замечание 1. При указанных условиях представление (2) единственно.

Замечание 2. Существуют различные представления n -го остаточного члена, в их числе:

- $R_n(x_0, x) = o((x - x_0)^n)$ – остаточный член в асимптотической форме (при $x \rightarrow x_0$), или в форме Пеано.⁴

¹Б. Тейлор (англ. *Brook Taylor*, 1685–1731) – английский математик, член Лондонского королевского общества. Вывел в 1712 общую формулу для разложения функций в степенные ряды.

²Кóлин Маклóрен (англ. *Colin Maclaurin*, 1698–1746) – шотландский, английский математик.

³Функции многих переменных обычно изучаются во втором семестре.

⁴Джузеппе Пеано (итал. *Giuseppe Peano*, 1858–1932) – итальянский математик.

При более сильных ограничениях, когда функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производную $(n+1)$ -го порядка и $p > 0$ – произвольно, найдётся точка ξ , лежащая между x_0 и x , такая что

$$\begin{aligned} \bullet \quad R_n(x_0, x) &= \left(\frac{x - x_0}{x - \xi} \right)^p \frac{(x - \xi)^{n+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi) = \\ &= (1 - \theta)^{n+1-p} \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n! p} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

где $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, – остаточный член в форме Шлёмилха–Рóша.¹

Полагая в нём $p = n + 1$, получаем остаточный член в форме Лагранжа²:

$$\bullet \quad R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_1(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \text{ где } 0 < \theta_1 < 1;$$

а полагая $p = 1$, получаем остаточный член в форме Коши³:

$$\bullet \quad R_n(x_0, x) = (1 - \theta_2)^n \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_2(x - x_0))}{n!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \text{ где } 0 < \theta_2 < 1.$$

$\bullet \quad R_n(x_0, x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ – остаточный член в интегральной форме.

7.3 Ряд Тейлора (Маклорена). Разложение функций в степенные ряды

«ЕГЭ является пыткой для школьников и его надо отменить, вернувшись к советской системе образования».

Председатель Следственного Комитета РФ А. Бастрыкин, из выступления 23.11.2021 на юридическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова.

Пусть функция $f(x)$ определена и бесконечно дифференцируема в некото-

¹Оскар Ксавёр Шлёмилх (нем. *Oskar Xaver Schlömilch*, 1823–1901) – немецкий математик, член Саксонской Академии наук.

²Жозеф Луи Лагранж (фр. *Joseph Louis Lagrange*, 1736–1813) – французский математик, астроном и механик итальянского происхождения. Наряду с Эйлером – лучший математик XVIII века.

³Огюстен Луи Коши (фр. *Augustin Louis Cauchy*, 1789–1857) – великий французский математик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

рой окрестности точки x_0 , тогда степенной ряд¹

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0 , а $f(x)$ называется *производящей функцией* этого ряда.

В случае $x_0 = 0$ ряд называется также *рядом Маклорена*.

Замечание. Приведём несколько определений из теории степенных рядов. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ называют *сходящимся* в точке x , если в этой точке сходится последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$. При этом предел $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$ называется *суммой ряда* в точке x , а совокупность всех значений x , при которых ряд сходится, называется *областью сходимости* степенного ряда. В области сходимости сумму ряда можно представить в виде $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x)$ – n -я частичная сумма, а $R_n(x)$ – n -й остаток ряда.

Область сходимости степенного ряда имеет вид интервала $(x_0 - R, x_0 + R)$ – конечного или бесконечного – с центром в точке x_0 , где число R называют *радиусом сходимости*². Позже при изучении степенных рядов будет показано, что любой степенной ряд внутри своего интервала сходимости можно почленно дифференцировать (интегрировать) любое число раз, причём продифференцированный (проинтегрированный) ряд будет сходиться к производной (первообразной) суммы ряда:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad \int S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Ряд Тейлора является степенным рядом, поэтому естественно возникает вопрос, всегда ли в своей области сходимости этот ряд сходится именно к производящей функции, т. е. справедливо

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (3)$$

(в этом случае говорят, что функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Тейлора). Ответ на этот вопрос дают две теоремы.

¹Ряд вида $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, где коэффициенты ряда $a_n \in \mathbb{R}$, центр $x_0 \in \mathbb{R}$.

²Радиус сходимости степенного ряда может быть найден по формуле Коши–Адамара: $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Теорема 2 (*необходимое условие разложимости функции в степенной ряд*). Если функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд, то она имеет непрерывные производные всех порядков внутри интервала сходимости.

Следствие. Разложение функции в степенной ряд единственно.

В самом деле, пусть функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$. Пользуясь тем, что степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать произвольное число раз, найдём коэффициенты a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Для этого подставим в последнее равенство $x = x_0$ и получим $a_0 = f(x_0)$. Продифференцировав равенство один раз $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ и подставив в него $x = x_0$, найдём $a_1 = f'(x_0)$. Дифференцируя последовательно и подставляя каждый раз x_0 вместо x , найдём коэффициенты $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$, $a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$ и т. д. Таким образом, разложение функции в степенной ряд является рядом Тейлора этой функции.

Однако условие существования непрерывных производных всех порядков внутри интервала сходимости *не является достаточным* для сходимости ряда Тейлора *к производящей функции* (а не к какой-либо другой): существуют бесконечно дифференцируемые функции, ряд Тейлора которых сходится, но при этом отличается от функции в любой окрестности x_0 . Коши предложил следующий пример.

Пример 84. Функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет все производные в нуле равными нулю: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ (остальные производные вычисляются аналогично). Поэтому коэффициенты ряда Тейлора в точке $x_0 = 0$ равны нулю: $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots \equiv 0 \neq e^{-\frac{1}{x^2}}$. В самой точке $x_0 = 0$ ряд сходится (к значению функции), но при этом в любой окрестности этой точки такой ряд по-прежнему сходится к нулю, а вовсе не к значению функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$.¹ $\square$

Теорема 3 (*необходимое и достаточное условие разложимости в ряд Тейлора*). Бесконечно дифференцируемая на интервале сходимости функция раскладывается в ряд Тейлора тогда и только тогда, когда остаточный член в

¹В связи с этим был даже выделен специально класс «хороших» функций, которые называли *аналитическими*. По определению, аналитическая функция (действительного переменного) — это функция, которая совпадает со своим рядом Тейлора в окрестности любой точки области сходимости.

формуле Тейлора стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$:

$$R_n(x_0, x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Покажем, что для разложимости в степенной ряд бесконечно дифференцируемой функции на интервале сходимости достаточно, чтобы все её производные были ограничены в совокупности: $|f^{(n+1)}(x)| \leq C$ для всех n и всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Действительно, тогда при $n \rightarrow +\infty$

$$|R_n(x_0, x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{C}{(n+1)!} R^{n+1} \rightarrow 0.$$

Замечание 1. Функцию, разложимую в ряд Тейлора, можно приблизить многочленом Тейлора с любой степенью точности, для этого надо лишь взять достаточное количество членов разложения.¹

Замечание 2. Ряд Тейлора можно представить в дифференциальной форме

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0)}{3!} + \dots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \dots,$$

где $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ — приращение функции² в точке x_0 , $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$.

7.4 Таблица разложений элементарных функций в степенные ряды

«ЕГЭ — не просто попытка для молодёжи, а абсолютно тупиковая ветвь развития системы образования. И отказаться от этой формы «оценки» знаний следовало ещё на этапе пилотного проекта».

Пётр Толстой (р. 1969) — российский политический деятель, зам. председателя Государственной думы РФ, ноябрь 2021.

Приведём таблицу разложений основных элементарных функций в степенные ряды по целым неотрицательным степеням x (с указанием их области сходимости):

¹Поэтому исследование свойств функции $f(x)$ в области сходимости её ряда Тейлора часто сводят к более простой задаче исследования поведения её многочлена Тейлора, причём чем выше степень многочлена, тем точнее аппроксимация. А если учесть, что равенство (3) внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать, то область применимости рядов Тейлора существенно расширяется.

²Можно сказать, что формула Тейлора есть не что иное как доведённая до логического завершения известная формула для приращения функции (или формула конечных приращений Лагранжа).

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1];$
- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots =$
 $= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ – биномиальное разложение,¹
 $m \in \mathbb{R}, x \in (-1; 1)$ (сходимость ряда на концах интервала зависит от m); в частности,

$$\text{при } m = -1: \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots;^2$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots;$$

$$\text{при } m = \frac{1}{2}: \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!} x^n + \dots;$$

$$\text{при } m = -\frac{1}{2}: \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + \dots;$$

- $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$ где B_{2n} – числа Бернулли;

¹При $m \in \mathbb{N}$ получаем, в частности, бином Ньютона.

²К вопросу о данной формуле вспоминается известный анекдот: «Бесконечное количество математиков заходит в бар. Первый говорит:

— Мне пол-литра пива, пожалуйста.

Второй говорит:

— А мне четверть литра.

Третий:

— А мне одну восьмую.

Четвёртый:

— А мне одну шестнадцатую...

Бармен:

— Эй, эй, эй, стоп! Вот вам один литр на всех и не морочьте мне голову!»

- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, x \in (-1; 1);$
- $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots =$

$$= x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}, x \in [-1, 1].$$
- $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R};$
- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R};$
- $\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n} 4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$ где B_{2n} – числа Бернулли.

Пример 85. Рассмотрим вопрос о разложении функции $\arcsin x$ в ряд по целым неотрицательным степеням x . Непосредственное составление ряда Тейлора здесь было бы затруднительно ввиду весьма громоздких выражений последовательных производных $\arcsin x$. Использование биномиального ряда при $m = -\frac{1}{2}$ позволяет обойти эту трудность. Воспользуемся тем, что разложить в степенной ряд производную арксинуса – более простая задача. Возьмём готовое разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$$

и, заменив в нём x на $(-x^2)$, получим разложение

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до x , где $-1 < x < 1$, находим искомое разложение:

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1} + C.$$

Поскольку $\arcsin(0) = 0$, то $C = 0$. $\square$

7.5 Таблица разложений элементарных функций по формуле Маклорена. Формула Тейлора на промежутке

Если функция не является бесконечно дифференцируемой, но удовлетворяет в окрестности точки $x_0 = 0$ условиям формулы Тейлора, то для неё можно выписать в окрестности этой точки локальную *формулу Маклорена* с остаточным

членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

С помощью этой формулы получаем в окрестности нуля уже известные разложения элементарных функций:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$
- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$
 $+ \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$
- $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n});$
- $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}).$

Приведём в заключение теорему о разложении функции по формуле Тейлора на конечном отрезке.

Теорема 4 (*формула Тейлора на промежутке*).¹ Пусть:

1) функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0, b]$; 2) $f(x)$ имеет на $[x_0, b]$ непрерывные производные $f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$; 3) на интервале (x_0, b) существует конечная

¹К вопросу о теоремах вспоминается один старый анекдот.

Приходит бабка лет за 80 к врачу.

— Вы знаете, в последнее время я мучаюсь бессонницей — никакие средства не помогают...

— Как лечить будем—с? Снотворным или очень быстро?

— Я всю ночь не могла заснуть, снотворное не помогает, хочу быстро.

Врач, обращаясь к худенькому пареньку в очках:

— Тогда, Сань, это по твоей части.

Парень:

— Садитесь, бабуль, сюда, я вам сказку прочитаю. Итак, расслабьтесь, закройте глаза и попробуйте всё это себе представить. Приходит Кощей Бессмертный к Бабе Яге и говорит: «— Бабка, я сегодня такое прочитал, не поверишь!» «— Да ну!» «— Слушай! Теорема 8.5. Пусть выполняются условия теоремы 3.1 и леммы 7. Тогда справедливо: пси от икс, игрек равняется дэ по дэ тэта эл эн от джи от икс, игрек, тэта; делённое на корень из дэ по дэ тэта от эф транспонированное...»

— Хр-р-р-р-р...

производная $f^{(n+1)}(x)$. Тогда для любого $x \in [x_0, b]$ и любого $p > 0$ найдётся такое число $\theta \in (0, 1)$, что справедлива формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x_0, x), \quad (4)$$

где $R_n(x_0, x)$ – остаточный член в форме Шлёмильха–Рóша.

Замечание. Разложение по формуле Тейлора можно использовать для вычисления высших производных в точке разложения (без непосредственного дифференцирования).

Пример 86. Найти $f^{(43)}(0)$, если $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$.

Решение. Найдём разложение функции $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$ по формуле Маклорена:

$$\begin{aligned} \sin(x^{13} + x^{15}) &= (x^{13} + x^{15}) - \frac{1}{3!}(x^{13} + x^{15})^3 + o(x^{45}) = \\ &= x^{13} + x^{15} - \frac{1}{6}(x^{39} + 3x^{26}x^{15} + 3x^{13}x^{30} + x^{45}) + o(x^{45}) = \\ &= x^{13} + x^{15} - \frac{1}{6}x^{39} - \frac{1}{2}x^{41} - \frac{1}{2}x^{43} - \frac{1}{6}x^{45} + o(x^{45}). \end{aligned}$$

Заметим, что в полученном разложении коэффициент при x^{43} равен $-\frac{1}{2}$. С другой стороны, коэффициент при x^{43} равен $\frac{f^{(43)}(0)}{43!}$. В силу единственности разложения в степенной ряд их можно приравнять:

$$\frac{f^{(43)}(0)}{43!} = -\frac{1}{2}, \quad \text{откуда } f^{(43)}(0) = -\frac{43!}{2}.$$

Вычислять производную 43-го порядка последовательным дифференцированием, очевидно, было бы крайне неэффективно. $\square$

Способы разложения функций по формуле Тейлора. Из сказанного выше следует, что существуют два основных способа разложения функций по формуле Тейлора. Первый способ – это использование напрямую формулы Тейлора, нахождение производных до нужного порядка включительно и т. д. Второй подход, убыстряющий решение и часто оказывающийся более эффективным, – это использование готовых (стандартных) разложений элементарных функций, сведение задачи к ним, если, конечно, это возможно. Кроме этого, используют любую возможность преобразовать функцию к виду, более удобному для последующего разложения.

Чтобы сравнить эти подходы, оценить достоинства и недостатки каждого из них, необходимо решить не одну задачу. Тем не менее, продемонстрируем разные подходы на следующем простом примере.

Пример 87. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ до членов 4-го порядка включительно с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $x = 0$.

Решение. *1-й способ* (стандартный, по формуле Маклорена). В окрестности точки $x = 0$ имеем разложение:

$$\sin^2 x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot x^4 + o(x)^4.$$

Вычислим значения функции и производных до 4-го порядка включительно (в данном случае это несложно):

$$f(0) = \sin^2 0 = 0, \quad f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \Big|_{x=0} = 0,$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x \Big|_{x=0} = 2, \quad f'''(x) = -4 \sin 2x \Big|_{x=0} = 0,$$

$$f^{(4)}(x) = -8 \cos 2x \Big|_{x=0} = -8.$$

Подставляя в исходное выражение, получаем искомое разложение:

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Заметим, что поскольку функция чётная, то ожидаемо она раскладывается исключительно по чётным степеням x .

2-й способ (сведение к стандартным разложениям). Воспользовавшись разложением синуса в окрестности нуля, получим

$$\begin{aligned} (\sin x)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + o^2(x^3) - 2x \cdot \frac{x^3}{3!} + 2x \cdot o(x^3) + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} \cdot o(x^3) = \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4), \end{aligned}$$

т. к. все остальные слагаемые есть $o(x^4)$.

3-й способ. Преобразуя функцию по формуле понижения степени $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ и раскладывая её затем по формуле Маклорена, приходим к тому же результату:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) \right) \right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4). \quad \square$$

Сколько членов разложения выписывать? При решении задач с помощью формулы Тейлора (например, при вычислении пределов функций) часто возникает вопрос, сколько слагаемых удерживать в разложении, если это количество не задано по условию. Конечно, это должно быть согласовано с условиями задачи, и это важный вопрос. Если вы выпишете слагаемых больше, чем нужно, вы увеличите сложность вычислений. Ну, а если возьмёте слагаемых

меньше, чем необходимо для корректного решения задачи, то просто получите неверный ответ. Это надо помнить.

Пример 88. [7, № 475] Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Решение. Известны стандартные разложения тангенса и синуса в окрестности точки $x = 0$:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Можно было выписать и большее количество членов, но сколько на самом деле необходимо? Давайте порассуждаем. Ясно, что раскладывать функции $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ нужно с одинаковой «точностью»: либо включая члены только с x и на этом остановиться, а возможно, по x^3 включительно, или даже удерживать все члены до 5-го порядка? Проанализируем эти варианты.

Предположим, мы подставим самые «короткие» разложения $\operatorname{tg} x = x + o(x)$, $\sin x = x + o(x)$, тогда предел примет вид

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + o(x)) - (x + o(x))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = ?$$

Получили неопределённость $0 \cdot \infty$, не очень ясно, что делать далее.

Если мы удержим в разложениях все члены по 3-ю степень включительно, то получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Мы нашли значение предела, это верное решение. Допустим теперь, что мы бы взяли более подробное разложение, включая 5-е степени:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)}{x^3}.$$

Так решать можно, но выкладки сложнее, а зачем всё усложнять? Видно же, что раскладывать функции в числителе дроби надо до такой степени точности, чтобы начало проявляться различие между этими функциями. В данном примере, члены с 1-й степенью совпадают, а с 3-й уже отличаются. Поэтому раскладывать по Тейлору надо до 3-й степени включительно. К тому же в знаменателе тоже стоит 3-я степень x .

Вывод: надо было раскладывать с самого начала обе функции до 3-й степени включительно. Это оптимальное решение. $\square$

Рассмотрим ещё один предел.

Пример 89. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$.

Этот предел несложно находится домножением на сопряжённое выражение. Решим теперь эту задачу с помощью формулы Тейлора. Перепишем предел в виде

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} \right)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{3}{x}} - x \right)$$

и воспользуемся разложением $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$, верным при $t \rightarrow 0$. Положим $t = \frac{3}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Получим

$$\sqrt{1 + \frac{3}{x}} = 1 + \frac{3}{2x} - \frac{9}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Подставим полученное разложение по степеням $\frac{1}{x}$ в исходный предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{3}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 + \frac{3}{2x} - \frac{9}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - x \right) = \frac{3}{2}. \square$$

Наконец, вычислим предел, который мы оставили на прошлом семинаре нерешённым, так как правило Лопиталья для него применять было неэффективно. Решим задачу с помощью формулы Маклорена.

Пример 90. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^5}$.

Решение. Воспользуемся разложениями (если нет под рукой, их всегда можно найти по формуле Маклорена). При этом выписываем члены разложения до 5-й степени включительно, поскольку в знаменателе дроби видим x^5 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5), \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

Тогда, подставляя в предел, получим

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^5} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) \right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \right)}{x^5} = \end{aligned}$$

(раскрывая скобки и упрощая, получим)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{3}{40} - \frac{1}{5} \right) + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{6}. \square$$

Пример 91. Используя разложения по формуле Маклорена, выяснить, при каких a, b, c выполнено равенство (при $x \rightarrow 0$)

$$e^{2x+x^2} - ax\sqrt[3]{1+bx} = 1 + cx^3 + o(x^3).$$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} e^{2x+x^2} &= 1 + (2x + x^2) + \frac{1}{2}(2x + x^2)^2 + \frac{1}{6}(2x + x^2)^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \frac{10}{3}x^3 + o(x^3), \\ (1 + bx)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}bx + \frac{\frac{1}{3} \cdot (-\frac{2}{3})}{2!}(bx)^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{3}bx - \frac{1}{9}(bx)^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Тогда левая часть равенства принимает вид:

$$\begin{aligned} 1 + 2x + 3x^2 + \frac{10}{3}x^3 - ax \left(1 + \frac{1}{3}bx - \frac{1}{9}(bx)^2 \right) + o(x^3) &= \\ = 1 + x(2 - a) + x^2 \left(3 - \frac{ab}{3} \right) + x^3 \left(\frac{10}{3} + \frac{ab^2}{9} \right) + o(x^3). \end{aligned}$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2 - a = 0; \\ 3 - \frac{ab}{3} = 0; \\ \frac{10}{3} + \frac{ab^2}{9} = c, \end{cases} \quad \text{т. е. при} \quad \begin{cases} a = 2; \\ b = \frac{9}{2}; \\ c = \frac{47}{6}. \end{cases} \quad \square$$

7.6 Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений. Оценки погрешностей

«Если есть Бог, то он — великий математик».

Пол Дирак (1902–1984), английский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике 1933 года.

Формулу Тейлора по праву считают одним из основных вычислительных средств анализа, а остаточный член в форме Лагранжа позволяет оценить погрешность приближённых вычислений. В основе вычислений (пусть разложение происходит в окрестности точки $x_0 = 0$) лежит приближённая формула

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

погрешность которой оценивается абсолютной величиной остатка после n -го члена, т. е. функции

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$. Если, например, вычисляется значение функции $f(x)$ на отрезке $[0, b]$, на котором производная $(n+1)$ -го порядка ограничена по модулю $|f^{(n+1)}(x)| \leq C$, то для величины остатка имеем оценку

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{C \cdot b^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Пример 92. [7, № 1397(а)] Вычислить число e с точностью до 10^{-4} .

Решение. Воспользуемся формулой Тейлора для e^x на отрезке $[0, 1]$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1,$$

и рассмотрим абсолютную величину отклонения ($\xi \in (0, 1)$):

$$\begin{aligned} \left| e^x - 1 - x - \dots - \frac{x^n}{n!} \right| &= |R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} x^{n+1} = \\ &= \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}, \end{aligned}$$

откуда находим $n \geq 7$. Возьмём $n = 7$ и $x = 1$, тогда

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{7!} \approx 2,7182... \quad \square$$

Пример 93. Вычислить приближённо число $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

Указание: воспользоваться формулой $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}} = e^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{27} = \frac{58}{81} \approx 0,716. \quad \square$$

7.7 Задачи для самостоятельного решения

Вопрос: что такое «эквилидистанта» по отношению к заданной плоской кривой?

Ответ: эквидистанта – это линия, равноудалённая от заданной кривой.

Решить задачи, находя производные нужных порядков и используя непосредственно формулу Тейлора для данной функции:

№293. Разложить в ряд Тейлора по целым неотрицательным степеням $(x - 1)$ алгебраический многочлен

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2.$$

№294. Разложить в ряд Маклорена до членов 6-го порядка включительно алгебраический многочлен

$$P(x) = (1 + x^2 + x^4)^{50}.$$

№295. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x = \frac{\pi}{3}$ до членов 5-го порядка включительно функцию

$$f(x) = \sin x.$$

№296. Разложить по формуле Маклорена до членов 6-го порядка включительно функцию

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

№297. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 1$ до членов 4-го порядка включительно функцию

$$f(x) = e^{x^2}.$$

№298. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 1$ до членов 3-го порядка включительно с остаточным членом в форме Лагранжа функцию

$$f(x) = \cos(3x + 1).$$

Решить задачи, используя готовые (стандартные) разложения элементарных функций по формуле Тейлора:

№299. Найти разложение по целым неотрицательным степеням переменной x (по формуле Маклорена) до члена с x^{2n} включительно и остаточным членом в форме Пеано функции

$$f(x) = \cos^2 x.$$

№300. Разложить по формуле Маклорена до члена $o(x^{2n+1})$ функцию

$$f(x) = \cos^4 x.$$

№301. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$ функцию

$$y = \frac{1}{x}.$$

№302. Найти разложение функции $f(x) = \frac{1}{3x+2}$ по формуле Маклорена до члена с x^n включительно.

№303. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}.$$

№304. Разложить по формуле Маклорена до членов $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = \ln \frac{x-5}{x-4}.$$

№305. [7, № 1381] Найти разложение функции $f(x) = e^{2x-x^2}$ по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^5 включительно.

№306. Представить формулой Маклорена до члена с $o(x^5)$ включительно функцию $f(x) = e^{\sin x}$.

№307. Найти разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, используя представление $\sin x = \cos x \operatorname{tg} x$, нечётность тангенса и метод неопределённых коэффициентов.

№308. Найти разложение функции $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ в окрестности точки $x = 0$ до членов 3-го порядка включительно.

№309. Найти разложение функции $f(x) = \lg(2x^2+x+2)$ по формуле Маклорена до членов 4-го порядка включительно.

№310. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x = -1$ с точностью до $o((x+1)^7)$ функцию

$$f(x) = (x+1) \ln(x^2+2x+2).$$

№311. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$ функцию

$$f(x) = \ln(4+3x-x^2).$$

№312. Разложить по формуле Тейлора до 6-го порядка включительно в окрестности точки $x = 1$ функцию

$$f(x) = \sin(x^2-2x+3).$$

№313. [7, № 1385] Найти разложение по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^3 включительно функции

$$f(x) = \sin(\sin x).$$

№314. [7, № 1387] Найти разложение функции $f(x) = \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)$ по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^6 включительно.

№315. Найти разложение функции $f(x) = x^2 \ln x$ в окрестности точки $x_0 = 1$ до членов 4-го порядка включительно.

№316. [7, № 1391] Функцию $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ при $x \rightarrow +\infty$ разложить по целым неотрицательным степеням дроби $1/x$ до члена с $1/x^3$.

№317. [7, № 1377] Найти разложение функции $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^4 включительно. Чему равно $f^4(0)$?

№318. Разложить функцию $f(x) = \sin(1 - \cos x)$ по формуле Маклорена до членов 6-го порядка включительно.

№319. Разложить функцию $f(x) = \frac{e^{3x^2}}{2+x^2}$ по формуле Маклорена до членов 4-го порядка включительно.

№320. Найти разложение функции $f(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)$ по формуле Маклорена до членов 3-го порядка включительно.

№321. Найти разложение функции $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{sh} 3x)$ по формуле Маклорена до членов 4-го порядка включительно.

№322. Найти разложение функции $f(x) = \ln(\cos(x^2))$ по формуле Маклорена до членов 6-го порядка включительно.

№323. Найти разложение функции $f(x) = \sqrt[3]{\frac{\sin x}{x}}$ по формуле Маклорена до членов 4-го порядка включительно.

№324. Найти разложение функции $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ в окрестности нуля до членов 2-го порядка включительно.

№325. [7, № 1382] Написать разложение по целым неотрицательным степеням x функции $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ до члена с x^4 .

№326. Разложить функцию при $x \rightarrow 0$ до членов 3-го порядка включительно

$$y = \sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}, \quad a > 0.$$

Используя разложения по формуле Тейлора, вычислить пределы:

№327. [7, № 1398] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4};$

№328. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos x)}{\sin(\sin x)};$

№329. [7, № 1404] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right);$

$$\text{№330. } \lim_{x \rightarrow 1} (3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}};$$

$$\text{№331. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[4]{e^{-x^2}}}{x^4};$$

$$\text{№332. } [7, \text{№ 1399}] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \sin x - x(1+x)}{x^3};$$

$$\text{№333. } [7, \text{№ 1402}] \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right);$$

$$\text{№334. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2x^2} \right)^{\frac{3}{x^2}};$$

$$\text{№335. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[7]{x^7 - x^6});$$

$$\text{№336. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x);$$

$$\text{№337. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin^4(2x)}}{1 - e^{\sin^2(4x)}};$$

$$\text{№338. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x});$$

$$\text{№339. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x - 2}{\ln(x-2) - \ln x};$$

$$\text{№340. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg} 5x - \cos x}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt[5]{1+x}};$$

$$\text{№341. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \sqrt{1-x^2} + x^4}{\ln(1+x^4)};$$

$$\text{№342. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x) - \sin 3x}{\operatorname{arctg} 4x};$$

$$\text{№343. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^5};$$

$$\text{№344. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{\arcsin x - \operatorname{tg} x};$$

$$\text{№345. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+5} - e^x}{\ln(\cos x)};$$

$$\text{№346. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{x^3} - x \sin^2(x^2) - x^2}{\ln(1+x^4+x^8) - x^4};$$

$$\text{№347. } \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\cos(x^2+x^3) + \frac{1}{2}x^2 \ln(1+x^2) - 1}{\sqrt[3]{8x^3+3x^5} - \sqrt{4x^2+x^4}}.$$

$$\text{№348. } \text{Используя разные приёмы, вычислить предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x - \operatorname{arctg} x} - 1}{\ln(x^3 + 1)}$$

наиболее рациональным способом.

№349. [5, Пример 5.52] Используя замену $y = x - 1$, свести к неопределённости $\frac{0}{0}$ и вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \pi \operatorname{ctg} \pi x \right)$.

№350. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1}{x^a}$ в зависимости от значений параметра a .

Разные задачи, используя разложения элементарных функций по формуле Тейлора:

№351. [7, № 1408] Для бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ величины y определить главный член вида Cx^n ($C = \text{const}$), если

$$y = (1 + x)^x - 1.$$

№352. Для бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ величины y определить главный член вида Cx^n , если

$$y = \ln(\cos(x^2)).$$

№353. Выделить главный член вида Cx^n при $x \rightarrow 0$ функции

$$y = \sin x - \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \right).$$

№354. Выделить главный член вида $C(1 - x)^n$ при $x \rightarrow 1$ функции

$$y = 4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1.$$

№355. Выделить главный член вида Cx^n при $x \rightarrow 0$ функции

$$y = (1 + x^2)^{\frac{1}{x} + 5} - e^x.$$

№356. Найти 2022-ю производную функции $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ в точке $x = 0$.

№357. Найти $f'''(0)$, если $f(x) = \sin^3(5x) \cdot \cos^3(7x)$, не проводя непосредственного дифференцирования.

№358. Найти $f^{(23)}(0)$, если $f(x) = \sin(x^7) \cdot \cos(x^8)$.

№359. Найти $f^{(50)}(0)$, если $f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$.

№360. Функцию $f(x) = \frac{1}{a - x}$ ($a \neq 0$) разложить в степенной ряд:

а) по степеням x ;

б) по степеням $x - b$, где $b \neq a$;

в) по степеням $\frac{1}{x}$.

№361. Используя формулу Маклорена, выяснить, при каких a, b, c выполнено равенство

$$e^{2x-x^2} - \frac{1 + ax}{\sqrt{1 + bx^2}} = cx^3 + o(x^3).$$

№362. Найти такие значения коэффициентов a, b, c, d , чтобы при $x \rightarrow 0$ выполнялось равенство

$$e^x = \frac{1 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2} + o(x^4).$$

№363. Найти такие значения коэффициентов a, b, c , чтобы при $x \rightarrow 0$ выполнялось равенство

$$\frac{3 \sin 2x}{\cos 2x + 2} = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$

№364. Подобрать числа a и b так, чтобы при $x \rightarrow 0$ функция

$$f(x) = \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

была бесконечно малой как можно более высокого порядка малости.

Решить прикладные задачи, используя разложения элементарных функций по формуле Тейлора:

№365. Доказать неравенство $|\sin x - x| \leq \frac{x^2}{2}$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

№366. Найти дифференциал функции $f(x) = \sin x$ в точке x_0 по определению – как главную (линейную относительно Δx) часть приращения функции.

№367. Используя разложение по формуле Маклорена, найти приближенное значение числа $\sqrt{5}$ (например, раскладывая до членов 2-го порядка включительно) и оценить точность приближения.

№368. [7, № 1394(а)] Оценить абсолютную погрешность приближения

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1.$$

Указание: рассмотреть формулу Тейлора на промежутке $[0, 1]$ и оценить величину остаточного члена в форме Лагранжа.

№369. [7, № 1394(б)] Оценить абсолютную погрешность приближённой формулы

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \text{при } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

№370. [7, № 1397(г)] Вычислить число $\sqrt{5}$ с точностью до 10^{-4} .

Указание: преобразовать число к виду $\sqrt{5} = \sqrt{1+4} = \sqrt{4(1+\frac{1}{4})} = 2(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ и воспользоваться соответствующим биномиальным разложением.

№371. Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить $\sqrt{2}$ с точностью до 10^{-4} .

№372. Найти разложение по формуле Тейлора функции $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in (-1; 1)$.

Указание: воспользоваться $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + \dots$

7.8 Ответы и решения

293. Любой алгебраический многочлен можно разложить в окрестности заданной точки точно (остаточный член равен нулю). Вычислим в точке $x = 1$ значение функции и всех её ненулевых производных:

$$f(1) = 4, \quad f'(x) = (3x^2 + 8x - 3)\Big|_{x=1} = 8,$$

$$f''(x) = (6x + 8)\Big|_{x=1} = 14, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) \equiv 0 \quad \text{при } n \geq 4.$$

Осталось подставить в формулу Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 4 + \frac{8}{1!}(x-1) + \frac{14}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + 0 + 0 + \dots \\ &= 4 + 8(x-1) + 7(x-1)^2 + (x-1)^3. \end{aligned}$$

Многочлен Тейлора готов.

294. Запишем многочлен $P(x)$ в виде $(1 + \alpha)^{50}$, где $\alpha = x^2 + x^4$. Поскольку $\alpha \sim x^2$ при $x \rightarrow 0$, то $o(\alpha^6) = o(x^{12})$, т. е. раскладывать по степеням α следует до 3-го порядка включительно. Согласно биному Ньютона имеем

$$\begin{aligned} P(x) &= (1 + \alpha)^{50} = 1 + 50\alpha + 1225\alpha^2 + 19600\alpha^3 + o(\alpha^3) = \\ &= 1 + 50(x^2 + x^4) + 1225(x^2 + x^4)^2 + 19600(x^2 + x^4)^3 + o(x^6) = \end{aligned}$$

(при раскрытии скобок оставляем только члены порядка не выше 6-го, члены более высокого порядка войдут в $o(x^6)$)

$$= 1 + 50x^2 + 1275x^4 + 22050x^6 + o(x^6).$$

295. По формуле Тейлора в окрестности точки $x = \frac{\pi}{3}$ имеем:

$$\begin{aligned} \sin x &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \\ &= \frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \frac{f^{(5)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{5!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5\right). \end{aligned}$$

Так как

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'(x) = \cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = -\sin x \Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'''(x) = -\cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2},$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f^{(5)}(x) = \cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2},$$

то получаем разложение

$$\begin{aligned} \sin x = & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \\ & + \frac{\sqrt{3}}{48} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \frac{1}{240} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5\right). \end{aligned}$$

296. 1-й способ (непосредственное разложение по формуле). По формуле Маклорена имеем:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + o(x^6).$$

Вычислим первые шесть производных в точке 0:

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}, \\ f''(x) &= -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Big|_{x=0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'''(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Big|_{x=0} = -\frac{1}{2}, \\ f^{(4)}(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f^{(5)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}, \\ f^{(6)}(x) &= -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Big|_{x=0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Подставив в разложение, получим окончательно:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{\sqrt{3}}{48}x^4 + \frac{1}{240}x^5 - \frac{\sqrt{3}}{1440}x^6 + o(x^6).$$

2-й способ (использование стандартных разложений). Преобразуем функцию к виду $\sin(x + 3) = \sin x \cos 3 + \cos x \sin 3$ и подставим стандартные разложения функций $\sin x$ и $\cos x$ (сделайте это самостоятельно).

297. По формуле Тейлора в окрестности точки $x = 1$ имеем:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + o((x-1)^4).$$

Вычислим первые четыре производные в точке $x = 1$:

$$f(1) = e, \quad f'(x) = 2xe^{x^2} \Big|_{x=1} = 2e, \quad f''(x) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2) \Big|_{x=1} = 6e,$$

$$f'''(x) = 4e^{x^2}(3x + 2x^3) \Big|_{x=1} = 20e, \quad f^{(4)}(x) = 4e^{x^2}(4x^4 + 12x^2 + 3) \Big|_{x=1} = 76e.$$

Подставляя в формулу Тейлора, получаем искомое разложение:

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= e + \frac{2e}{1!}(x-1) + \frac{6e}{2!}(x-1)^2 + \frac{20e}{3!}(x-1)^3 + \frac{76e}{4!}(x-1)^4 + o((x-1)^4) = \\ &= e + 2e(x-1) + 3e(x-1)^2 + \frac{10e}{3}(x-1)^3 + \frac{19e}{6}(x-1)^4 + o((x-1)^4). \end{aligned}$$

298. По формуле Тейлора в окрестности точки $x = 1$ имеем:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4.$$

Вычислим первые четыре производные в точке $x = 1$:

$$\begin{aligned} f(1) &= \cos 4, \quad f'(x) = -3 \sin(3x+1) \Big|_{x=1} = -3 \sin 4, \\ f''(x) &= -9 \cos(3x+1) \Big|_{x=1} = -9 \cos 4, \quad f'''(x) = 27 \sin(3x+1) \Big|_{x=1} = 27 \sin 4, \\ f^{(4)}(x) &= 81 \cos(3x+1) \Big|_{x=\xi} = 81 \cos(3\xi+1), \end{aligned}$$

где $\xi = 1 + \theta(x-1)$, $0 < \theta < 1$. Подставляя в формулу Тейлора, получаем искомое разложение:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 4 - 3 \sin 4(x-1) - \frac{9 \cos 4}{2}(x-1)^2 + \frac{9 \sin 4}{2}(x-1)^3 + \\ &\quad + \frac{27 \cos(3\xi+1)}{8}(x-1)^4. \end{aligned}$$

299. Преобразовав $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ и используя стандартное разложение косинуса в окрестности нуля, получим

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \right) = \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}). \end{aligned}$$

300. Воспользуемся формулой понижения степени $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$:

$$(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x.$$

Тогда, раскладывая косинусы по Маклорену, получаем

$$\cos^4 x = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!} (1 + 2^{2k-2}) x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

301. Заменой $t = x - 1$ функция сводится к виду $f(t) = \frac{1}{1+t}$. При условии $|t| < 1$ это выражение является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $(-t)$, и получаем ряд

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем искомое разложение по степеням двучлена $(x - 1)$ (при $|x - 1| < 1$):

$$\frac{1}{x} = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + \dots + (-1)^n (x - 1)^n + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (x - 1)^k.$$

302. Преобразовав функцию к виду $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3x}{2}}$ и воспользовавшись биномиальным разложением $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$, получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x^2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n x^n \right) + o(x^n) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}x^2 - \dots + (-1)^n \frac{3^n}{2^{n+1}} x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

303. Так как

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})} - \frac{1}{3(1-\frac{x}{3})},$$

то приходим к степенному ряду (при условии $|\frac{x}{2}| < 1$)

$$\frac{2x-1}{x^2-x-6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n.$$

304. Преобразуем функцию к виду, удобному для последующего разложения:

$$\ln \frac{x-5}{x-4} = \ln \frac{5}{4} + \ln \frac{1-\frac{x}{5}}{1-\frac{x}{4}}$$

и воспользуемся стандартным разложением для логарифма

$$\ln \frac{x-5}{x-4} = \ln \frac{5}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \left(\frac{1}{4^k} - \frac{1}{5^k} \right) + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

305. Так как x близко к нулю, то и $2x - x^2$ также близко к нулю, а значит, можно воспользоваться стандартным разложением экспоненциальной функции $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^5}{5!} + o(t^5)$, подставив вместо t выражение $2x - x^2$. Раскрывая скобки и записывая все члены порядка выше 5 как $o(x^5)$, получим:

$$\begin{aligned} e^{2x-x^2} &= 1 + (2x - x^2) + \frac{(2x - x^2)^2}{2!} + \frac{(2x - x^2)^3}{3!} + \frac{(2x - x^2)^4}{4!} + \frac{(2x - x^2)^5}{5!} + \\ &\quad + o((2x - x^2)^5) = 1 + 2x - x^2 + \frac{1}{2}(4x^2 - 4x^3 + x^4) + \\ &\quad + \frac{1}{6}((2x)^3 - 3(2x)^2x^2 + 3(2x)(x^2)^2) + \frac{1}{24}((2x)^4 - 4(2x)^3x^2) + \\ &\quad + \frac{1}{120}(2x)^5 + o(x^5) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Здесь при упрощении использовалось, что $o((2x - x^2)^5) = o(x^5)$. Докажем это. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o((2x - x^2)^5)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{o((2x - x^2)^5)}{(2x - x^2)^5} \cdot \frac{(2x - x^2)^5}{x^5} \right) = 0.$$

306. Используя стандартные разложения, получаем

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{\sin^4 x}{4!} + \frac{\sin^5 x}{5!} + o(\sin^5 x) = \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right)^3 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right)^4 + \\ &\quad + \frac{1}{120} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right)^5 + o(x^5) = \end{aligned}$$

(удерживаем только члены до 5-го порядка включительно)

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 \right) + \frac{1}{6} \left(x^3 - 3x^2 \cdot \frac{x^3}{6} \right) +$$

$$+\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5).$$

307. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ является нечётной, и поэтому будем искать разложение тангенса в виде

$$\operatorname{tg} x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6), \quad x \rightarrow 0.$$

Используя тождество $\sin x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$ и разложения для синуса и косинуса, получаем

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \equiv (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6)) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right).$$

Раскрывая скобки и приравнявая коэффициенты при x^3 и x^5 , находим

$$\begin{cases} -\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + a_3, \\ \frac{1}{5!} = \frac{1}{4!} - \frac{a_3}{2!} + a_5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = \frac{1}{3}, \\ a_5 = \frac{2}{15}, \end{cases}$$

и поэтому $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$, $x \rightarrow 0$.

308. Подставим в разложение $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ двучлен $x + x^2$:

$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{(x+x^2)^2}{2} + \frac{(x+x^2)^3}{3} + o((x+x^2)^3).$$

Раскрывая скобки, оставляя только члены не выше 3-й степени относительно x и учитывая, что при $x \rightarrow 0$ имеем $o((x+x^2)^3) = o(x^3)$, окончательно получим

$$\ln(1+x+x^2) = x + x^2 - \frac{x^2 + 2x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

309. Имеем при $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \lg(2x^2+x+2) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln \left(2 \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)\right) = \frac{1}{\ln 10} \left(\ln 2 + \ln \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)\right).$$

Воспользуемся разложением $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$ при $t \rightarrow 0$, где $t = x^2 + \frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + x^2 + \frac{x}{2}\right) &= x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4) = \\ &= x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{3x^4}{4} + \frac{x^3}{8}\right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{16} + o(x^4) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}x^2 - \frac{11}{24}x^3 - \frac{17}{64}x^4 + o(x^4).$$

Окончательно, $f(x) = \frac{1}{\ln 10} \left(\ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}x^2 - \frac{11}{24}x^3 - \frac{17}{64}x^4 \right) + o(x^4)$.

310. Сделав замену $t = x + 1$, получаем $g(t) = t \ln(1 + t^2)$. Используя разложение логарифмической функции, находим

$$g(t) = t \left(t^2 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} + o(t^6) \right) = t^3 - \frac{t^5}{2} + \frac{t^7}{3} + o(t^7).$$

Осталось сделать обратную подстановку:

$$f(x) = (x+1)^3 - \frac{(x+1)^5}{2} + \frac{(x+1)^7}{3} + o((x+1)^7).$$

311. Так как $4 + 3x - x^2 = -(x-4)(x+1)$, то, полагая $t = x - 2$, получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln((4-x)(x+1)) = \\ &= g(t) = \ln((2-t)(3+t)) = \ln 6 + \ln \left(1 - \frac{t}{2} \right) + \ln \left(1 + \frac{t}{3} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, используя стандартные разложения, получаем

$$g(t) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n \cdot 2^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n \cdot 3^n}, \quad t \rightarrow 0.$$

Следовательно, окончательно при $x \rightarrow 2$ получаем

$$\ln(4 + 3x - x^2) = \ln 6 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{3^n} - \frac{1}{2^n} \right) \frac{(x-2)^n}{n}.$$

312. Преобразуем функцию и сделаем замену $t = (x-1)^2$:

$$f(x) = \sin(x^2 - 2x + 3) = \sin((x-1)^2 + 2) = \sin(t + 2).$$

Так как при $x \rightarrow 1$ имеем $t \rightarrow 0$, то найдём разложение функции по целым неотрицательным степеням t до 3-го порядка включительно:

$$\begin{aligned} \sin(t + 2) &= \sin t \cos 2 + \cos t \sin 2 = \left(t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \right) \cos 2 + \\ &+ \left(1 - \frac{t^2}{2!} + o(t^3) \right) \sin 2 = \sin 2 + \cos 2 \cdot t - \frac{\sin 2}{2} t^2 - \frac{\cos 2}{6} t^3 + o(t^3) = \end{aligned}$$

$$= \sin 2 + \cos 2 \cdot (x-1)^2 - \frac{\sin 2}{2}(x-1)^4 - \frac{\cos 2}{6}(x-1)^6 + o((x-1)^6).$$

313. Разложение по целым неотрицательным степеням переменной x предполагает разложение в окрестности точки $x_0 = 0$. Так как при $x \rightarrow 0$ имеем $\sin x \rightarrow 0$, то, подставляя в разложение $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)$ вместо t выражение $\sin x$, получаем

$$\begin{aligned} \sin(\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + o(\sin^4 x) = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)) - \\ &- \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^3 + o(x^4) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4). \end{aligned}$$

Здесь при упрощении было использовалось, что $o(\sin^4 x) = o(x^4)$. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(\sin^4 x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{o(\sin^4 x)}{\sin^4 x} \cdot \frac{\sin^4 x}{x^4} \right) = 0.$$

314. Воспользовавшись стандартными разложениями, при $x \neq 0$ получаем

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7),$$

поэтому $\ln \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \ln(1 + \alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + o(\alpha^3)$, где $\alpha = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^7)$. Ответ: $\ln \left(\frac{\sin x}{x} \right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6)$.

315. Обозначим $t = x - 1$ и преобразуем функцию к виду:

$$\begin{aligned} y &= ((x-1) + 1)^2 \cdot \ln(1 + (x-1)) = \\ &= (t^2 + 2t + 1) \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4) \right) = \dots = t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + o(t^4) = \\ &= (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + o((x-1)^4). \end{aligned}$$

316. Поскольку $x \rightarrow +\infty$, то биномиальное разложение $(1+x)^m = 1 + mx + o(x)$ к корню $\sqrt{1+x^2}$ применять, конечно, нельзя. Преобразуем функцию:

$$f(x) = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = x \left(\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right).$$

Поскольку $1/x^2 \rightarrow 0$, то теперь можно воспользоваться биномиальным разложением $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$ при $t = \frac{1}{x^2}$, откуда получаем

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) - 1 \right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

317. Решать задачу стандартным способом, находя производные функции до 4-го порядка включительно и подставляя их значения в точке $x = 0$ в формулу Тейлора нецелесообразно ввиду больших вычислений. Поступим иначе: преобразуем функцию к виду

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(1+x+x^2)(x+1)}{(1-x+x^2)(x+1)} = \frac{(1+x+x^2)(x+1)}{x^3+1} = \\ &= \frac{x^3+1+2x(x+1)}{x^3+1} = 1 + \frac{2x(x+1)}{x^3+1} = 1 + 2x(x+1)(x^3+1)^{-1}. \end{aligned}$$

Разложим $(x^3+1)^{-1}$ в окрестности нуля до членов 4-го порядка: $(x^3+1)^{-1} = 1 - x^3 + o(x^5)$. Подставляя это в выражение для функции, раскрывая скобки и упорядочивая слагаемые по мере возрастания степени x , получим искомое разложение

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x(x+1)(1 - x^3 + o(x^5)) = 1 + 2x(x+1)(1 - x^3) + \\ &+ 2x(x+1)o(x^5) = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + (-2x^5 + 2x(x+1)o(x^5)) = \\ &= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Далее, чтобы найти $f^4(0)$, нет необходимости вычислять производную 4-го порядка. Воспользуемся полученным разложением. Согласно формуле Маклорена,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4).$$

В силу единственности разложения, $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -2$, откуда $f^{(4)}(0) = -48$.

318. Так как при $x \rightarrow 0$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$, то $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)$. Кроме того, при $t \rightarrow 0$ имеем $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$.

Подставляя $t = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)$, получаем искомое разложение:

$$\begin{aligned} \sin(1 - \cos x) &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6) \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6) \right)^3 + o(x^6) = \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - \frac{1}{6} \left(\frac{x^2}{2} \right)^3 + o(x^6) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - \frac{7x^6}{360} + o(x^6). \end{aligned}$$

319. Преобразуем функцию к виду: $f(x) = \frac{e^{3x^2}}{2 \left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)}$. Поскольку $e^{3x^2} = 1 + 3x^2 + \frac{(3x^2)^2}{2!} + o(x^4)$, при $t \rightarrow 0$ имеем $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$,

а следовательно, $\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$, то, подставляя, получаем искомое разложение:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(1 + 3x^2 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^4) \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{13}{4}x^4 \right) + o(x^4) = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}x^2 + \frac{13}{8}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

320. Так как при $t \rightarrow 0$ имеем $\operatorname{sh} t = t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$, а $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, то, подставляя, получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) &= \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} + o(x^3) = \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) + \frac{1}{6} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 + o(x^3) = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

321. Поскольку при $t \rightarrow 0$ имеем $\operatorname{tg} t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^4)$, а $\operatorname{sh} t = t + \frac{t^3}{6} + o(x^4)$, то, подставляя, с учётом $o(\operatorname{sh}^4 3x) = o(x^4)$ получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\operatorname{sh} 3x) &= \operatorname{sh} 3x + \frac{(\operatorname{sh} 3x)^3}{3} + o(x^4) = \\ &= \left(3x + \frac{(3x)^3}{6} + o(x^4) \right) + \frac{\left(3x + \frac{(3x)^3}{6} + o(x^4) \right)^3}{3} + o(x^4) = \\ &= 3x + \frac{9}{2}x^3 + 9x^3 + o(x^4) = 3x + \frac{27}{2}x^3 + o(x^4). \end{aligned}$$

322. Так как при $x \rightarrow 0$ $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + o(x^6)$, и при $t \rightarrow 0$ $\ln(1+t) = t + o(t)$, то, подставляя, приходим к разложению:

$$\ln(\cos(x^2)) = \ln \left(1 + \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^6) \right) \right) = \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^6) \right) + o(x^6) = -\frac{x^4}{2} + o(x^6).$$

323. Так как при $x \rightarrow 0$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$, то $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)$. Кроме того, при $t \rightarrow 0$ имеем $\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{9} + o(t^2)$. Подставляя, получим

$$\sqrt[3]{\frac{\sin x}{x}} = \sqrt[3]{1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5) \right)} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5) \right) - \frac{1}{9} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5) \right)^2 + o(x^4) = \\
&= 1 - \frac{x^2}{18} + \frac{x^4}{360} - \frac{x^4}{324} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{18} - \frac{x^4}{3240} + o(x^4).
\end{aligned}$$

324. Поскольку $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$, то разложим вначале показатель степени у экспоненты:

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{x}} &= e \cdot \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = \\
&= e \left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) \right) \\
&= e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

325. Имеем при $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} = \\
&= \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} = \frac{1}{1 + \alpha} = \\
&\text{(где } \alpha = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)) \\
&= 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 + o(x^4) = \\
&= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) - \\
&\quad - \left(\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{24} \right) + \frac{x^4}{16} + o(x^4) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4).
\end{aligned}$$

326. Имеем $y = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}$, поэтому

$$y = \left(1 - \frac{x}{3a} - \frac{x^2}{9a^2} - \frac{5x^3}{81a^3} + o(x^3) \right) \left(1 - \frac{x}{3a} + \frac{2x^2}{9a^2} - \frac{14x^3}{81a^3} + o(x^3) \right) =$$

$$= 1 - \frac{2x}{3a} + \frac{2x^2}{9a^2} - \frac{22x^3}{81a^3} + o(x^3).$$

327. Воспользуемся стандартными разложениями:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4))}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

328. Имеем при $x \rightarrow 0$: $\sin(\sin x) = \sin(x + o(x)) = x + o(x)$, $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\cos(\frac{\pi}{2} \cos x) = \sin(\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)) = \sin(\frac{\pi}{4}x^2 + o(x^2)) = \frac{\pi}{4}x^2 + o(x^2)$, откуда видно, что искомый предел равен 0.

329. Так как при $x \rightarrow +\infty$ имеем $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, то воспользуемся разложением по формуле Маклорена $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ при $t = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right) = \frac{1}{2}.$$

330. Сделав замену $t = x - 1$, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (3\sqrt[3]{1+t} - 2\sqrt{1+t})^{\frac{1}{\ln(1+t)}} = e^A,$$

$$\begin{aligned} \text{где } A &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3\sqrt[3]{1+t} - 2\sqrt{1+t} - 1}{\ln(1+t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3\left(1 + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{9} + o(t^2)\right) - 2\left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right) - 1}{t + o(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{t^2}{12} + o(t^2)}{t + o(t)} = 0. \end{aligned}$$

331. Умножим и разделим на сопряжённое выражение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{e^{-x^2}}}{x^4(\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{e^{-x^2}})} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{e^{-x^2}}}{x^4}.$$

Поскольку $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$, то при $t = -x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ имеем

$$\sqrt{e^{-x^2}} = \sqrt{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)} = 1 + \frac{1}{2} \left(-x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right) -$$

$$-\frac{1}{8} \left(-x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right)^2 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

Тогда окончательно получаем

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4))}{x^4} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{24}.$$

332. Имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - x - x^2}{x^3} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

333. Имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - x^3 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^6}} \right) =$

$$\begin{aligned} & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) - \right. \\ & \quad \left. - x^3 \left(1 + \frac{1}{2x^6} + o\left(\frac{1}{x^{11}}\right) \right) \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + x^2 - x + \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - x^3 + o(1) \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

334. Преобразуем предел к виду

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right)^{\frac{3}{x^2}} \stackrel{[1; \infty]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} - 1 \right) \frac{3}{x^2}} \stackrel{[0; \infty]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 - 1 \right) \frac{3}{x^2}} = \\ & = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^2 - 1 \right) \frac{3}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) - 1 \right) \frac{3}{x^2}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

335. Преобразуем предел к виду $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - x \sqrt[7]{1 - \frac{1}{x}} \right)$. Так как

при $t \rightarrow 0$ $\sqrt[6]{1+t} = 1 + \frac{t}{6} + o(t)$, $\sqrt[7]{1+t} = 1 + \frac{t}{7} + o(t)$, то $\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $\sqrt[7]{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{7x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Подставляя в выражение под знаком предела, получим:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - x \left(1 - \frac{1}{7x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + o(1) \right) = \frac{13}{42}.$$

336. Обозначим $f(x) = x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$, тогда

$$f(x) = x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right).$$

Полагая $t = \frac{1}{x}$, получаем $f(x) = g(t) = \frac{1}{t^2} (\sqrt{1 + 2t} - 2\sqrt{1 + t} + 1)$. Поскольку $\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$, $t \rightarrow 0$, то получаем при $t \rightarrow 0$

$$g(t) = \frac{1}{t^2} \left(1 + t - \frac{1}{2}t^2 - 2 \left(1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 \right) + o(t^2) + 1 \right) = \frac{1}{t^2} \left(-\frac{1}{4}t^2 + o(t^2) \right).$$

Следовательно, искомый предел равен $(-\frac{1}{4})$.

$$\begin{aligned} \textbf{337.} \text{ Имеем } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin^4(2x)}}{1 - e^{\sin^2(4x)}} &\stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \sin^4(2x) + o(x^4))}{1 - (1 + \sin^2(4x) + o(x^2))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^4(2x) + o(x^4)}{-\sin^2(4x) + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin^4(2x)}{(4x)^2} + o(x^2)}{-\frac{\sin^2(4x)}{(4x)^2} + o(1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin^4(2x)}{(4x)^2} + o(x^2) \right)}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin^2(4x)}{(4x)^2} + o(1) \right)} = 0. \end{aligned}$$

338. Перепишем предел в виде $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right)$, тогда, поскольку при $t \rightarrow 0$ имеет место разложение $\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$, получим:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) + \right. \\ &\left. + \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(-\frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

339. Перепишем предел в виде

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{2}{x} \right)}{\ln \left(1 - \frac{2}{x} \right)}.$$

Так как при $t \rightarrow 0$ имеют место разложения $\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$ и $\ln(1 + t) = t + o(t)$, то при $x \rightarrow +\infty$

$$\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) = -\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Подставляя под знак предела, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 - \frac{2}{x}\right)}{-\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-\frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{-\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

340. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg} 5x - \cos x}{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt[5]{1 + x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 5x + o(x) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - \frac{x}{5} + o(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + o(x)}{-\frac{x}{5} + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 + o(1)}{-\frac{1}{5} + o(1)} = -25. \end{aligned}$$

341. 1) $\cos(\sin x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^4 x}{24} + o(x^4) =$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$

2) Так как при $t \rightarrow 0$ $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (-x^2 + x^4)} &= 1 + \frac{1}{2}(-x^2 + x^4) - \frac{1}{8}(-x^2 + x^4)^2 + o(x^4) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4). \end{aligned}$$

3) $\ln(1 + x^4) = x^4 + o(x^4)$. Подставляя полученные разложения под знак предела, находим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{6}.$$

342. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x) - \sin 3x}{\operatorname{arctg} 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x + o(x)) - 3x + o(x)}{4x + o(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3x + o(x)}{4x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + o(1)}{4 + o(1)} = -\frac{1}{4}.$$

343. Воспользуемся разложениями косинуса, арксинуса и арктангенса, удерживая при разложении члены не выше 5-й степени:

$$\begin{aligned} \cos x \cdot \arcsin x - \operatorname{arctg} x &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)\right) - \\ &- \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{24} - \\ &- x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + o(x^5) = -\frac{x^5}{6} + o(x^5). \end{aligned}$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^5}{6} + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{6}.$

344. Воспользуемся готовыми разложениями синуса, арктангенса, арксинуса и тангенса, удерживая при разложении члены не выше 3-й степени (члены 1-й степени у всех этих разложений одинаковы):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{\arcsin x - \operatorname{tg} x} &\stackrel{[0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -1. \end{aligned}$$

345. Имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \left(e^{\left(\frac{1}{x}+5\right) \ln(1+x^2)-x} - 1\right)}{\ln(\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}+5\right) \ln(1+x^2)-x} - 1}{\ln(\cos x)}.$ Так как $\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^3)$, то $\left(\frac{1}{x}+5\right) \ln(1+x^2) - x = \left(\frac{1}{x}+5\right)(x^2 + o(x^3)) - x = 5x^2 + o(x^2).$ Далее, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, поэтому $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$ Окончательно

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x^2+o(x^2)} - 1}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 5x^2 + o(x^2)) - 1}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} \\ &= -10. \end{aligned}$$

346. Опытный студент заметит, что раскладывая по формуле Маклорена функции в числителе и знаменателе необходимо до x^8 , так как в знаменателе

это будет старшая степень, которая останется после сокращения x^4 . Итак, используя стандартные разложения, найдём многочлен Тейлора для числителя, удерживая все члены до 8-го порядка включительно:

$$x^2 e^{x^3} = x^2 \left(1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o(x^6) \right) = x^2 + x^5 + \frac{x^8}{2} + o(x^8),$$

$$\sin^2(x^2) = \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) \right)^2 = x^4 - \frac{x^8}{3} + o(x^8), \quad x \sin^2(x^2) = x^5 + o(x^8),$$

поэтому для числителя дроби получаем

$$x^2 e^{x^3} - x \sin^2(x^2) - x^2 = x^2 + x^5 + \frac{x^8}{2} - x^5 - x^2 + o(x^8) = \frac{x^8}{2} + o(x^8).$$

Теперь получим разложение для знаменателя дроби:

$$\ln(1 + x^4 + x^8) - x^4 = (x^4 + x^8) - \frac{(x^4 + x^8)^2}{2} + o(x^8) - x^4 = \frac{x^8}{2} + o(x^8).$$

Подставляя в предел, окончательно получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{x^3} - x \sin^2(x^2) - x^2}{\ln(1 + x^4 + x^8) - x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^8}{2} + o(x^8)}{\frac{x^8}{2} + o(x^8)} = 1.$$

347. Разложим функции по формуле Маклорена до членов 5-го порядка включительно. Поскольку $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$ и $\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{9} + o(t^2)$, то

$$\sqrt[3]{8x^3 + 3x^5} = 2x \left(1 + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{64} + o(x^4) \right) = 2x + \frac{x^3}{4} - \frac{x^5}{32} + o(x^5),$$

$$\sqrt{4x^2 + x^4} = 2x \left(1 + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{16 \cdot 8} + o(x^4) \right) = 2x + \frac{x^3}{4} - \frac{x^5}{64} + o(x^5).$$

Тогда знаменатель дроби

$$\sqrt[3]{8x^3 + 3x^5} - \sqrt{4x^2 + x^4} = -\frac{x^5}{64} + o(x^5).$$

Далее, т. к. $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ и $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, то

$$\cos(x^2 + x^3) = 1 - \frac{(x^2 + x^3)^2}{2} + o(x^5) = 1 - \frac{x^4}{2} - x^5 + o(x^5),$$

$$\frac{1}{2} x^2 \ln(1 + x^2) = \frac{1}{2} x^2 \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right) = \frac{x^4}{2} + o(x^5),$$

Тогда числитель дроби $\cos(x^2 + x^3) + \frac{1}{2}x^2 \ln(1 + x^2) - 1 = -x^5 + o(x^5)$. Подставляя в исходный предел, получаем

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos(x^2 + x^3) + \frac{1}{2}x^2 \ln(1 + x^2) - 1}{\sqrt[3]{8x^3 + 3x^5} - \sqrt{4x^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-x^5 + o(x^5)}{-\frac{x^5}{64} + o(x^5)} = 64.$$

348. Чтобы упростить выкладки, вначале воспользуемся соотношениями эквивалентности:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x - \operatorname{arctg} x} - 1}{\ln(x^3 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

Обозначим $f(x) = \sin x - \operatorname{arctg} x$, $g(x) = x^3$ и применим правило Лопиталя. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы при всех значениях x , причём $g'(x) \neq 0$ в любой проколотой окрестности нуля. Предел отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2}$ при $x \rightarrow 0$ представляет собой неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Раскроем эту неопределённость при помощи формулы Маклорена:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 - x^2 + o(x^2))}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

349. Приведя к общему знаменателю, сделаем подстановку $y = x - 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \pi \operatorname{ctg} \pi x \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \pi y - \pi \cos \pi y \cdot \ln(1 + y)}{\ln(1 + y) \cdot \sin \pi y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\pi y + o(y^2) - \pi(1 + o(y))(y - \frac{y^2}{2} + o(y^2))}{\pi y^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

350. Вначале сделаем замену $t = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1}{x^a} &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{e^t - t - 1}{\left(\frac{1}{t}\right)^a} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - t - 1}{t^{-a}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^{-a}} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{t^{-a-2}} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } a = -2; \\ 0, & \text{если } a > -2; \\ +\infty, & \text{если } a < -2. \end{cases} \end{aligned}$$

351. Поскольку главный член Cx^n эквивалентен y при $x \rightarrow 0$, то рассмотрим предел отношения y и x^n в точке $x = 0$ и выясним, при каких n

он равен константе $C \neq 0$. Воспользуемся при этом двумя разложениями $e^x = 1 + x + o(x)$, $\ln(1+x) = x + o(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(1+x)} - 1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x(x+o(x))} - 1}{x^n} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+o(x^2)} - 1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 + o(x^2) - 1}{x^n} \stackrel{n=2}{=} 1. \end{aligned}$$

Таким образом, главный член $Cx^n = x^2$.

352. Так как при $x \rightarrow 0$ имеем $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + o(x^4)$, и при $t \rightarrow 0$ имеем $\ln(1+t) = t + o(t)$, то, подставляя, получаем:

$$\ln(\cos(x^2)) = \ln\left(1 + \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^6)\right)\right) = -\frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Таким образом, главный член $Cx^n = -\frac{1}{2}x^4$.

353. Используя стандартные разложения и удерживая члены до 5-го порядка включительно, получаем

$$\begin{aligned} y &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) - \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{1}{2}\left(x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{4}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}\left(x^3 + \frac{3x^4}{2} + \frac{3x^5}{4}\right) - \frac{1}{4}(x^4 + 2x^5) + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)\right) = -\frac{1}{15}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Таким образом, главный член функции есть $-\frac{1}{15}x^5$.

354. Введём переменную t так, чтобы избавиться от иррациональности: $t = \sqrt[20]{x}$, тогда поскольку $x \rightarrow 1$, то $t \rightarrow 1$ и

$$1 - x = 1 - t^{20} = (1-t)(1+t+t^2+\dots+t^{19}) \sim 20(1-t) \Rightarrow 1-t \sim \frac{1-x}{20}.$$

Имеем $y = 4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1 = 4t^5 - 5t^4 + 1 = (1-t)^2(4t^3 + 3t^2 + 2t + 1) \sim 10(1-t)^2$. Следовательно, $y(x) \sim \frac{(1-x)^2}{400} \cdot 10 = \frac{(1-x)^2}{40}$. Это и есть главный член функции при $x \rightarrow 1$: $y(x) = \frac{(1-x)^2}{40} + o((1-x)^2)$.

$$\mathbf{355.} \text{ Имеем } y = (1+x^2)^{\frac{1}{x}+5} - e^x = e^{\left(\frac{1}{x}+5\right)\ln(1+x^2)} - e^x = e^x \left(e^{\left(\frac{1}{x}+5\right)\ln(1+x^2)-x} - 1\right).$$

Так как при $x \rightarrow 0$ имеем $e^x = 1 + x + o(x)$, $\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^3)$, то $\left(\frac{1}{x}+5\right)\ln(1+x^2) - x = \left(\frac{1}{x}+5\right)(x^2 + o(x^3)) - x = 5x^2 + o(x^2)$ и окончательно получаем $e^x \left(e^{5x^2+o(x^2)} - 1\right) = (1+x+o(x))(1+5x^2+o(x^2) - 1) = 5x^2 + o(x^2)$. Главный член равен $5x^2$.

356. Воспользуемся разложением по формуле Маклорена $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + o(t^n)$ при $t = x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}) =$$

(положим $n = 1011$)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{1011} x^{2022} + o(x^{2022}).$$

В силу единственности разложения коэффициент при x^{2022} равен $\frac{f^{(2022)}(0)}{2022!}$.

Приравнивая коэффициенты, получаем $\frac{f^{(2022)}(0)}{2022!} = (-1)^{1011}$, откуда находим искомую производную $f^{(2022)}(0) = -2022!$. Мы рассмотрели наиболее простой способ решения этой задачи.

357. Найдём разложение функции до членов 3-го порядка включительно по формуле Маклорена:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^3(5x) \cdot \cos^3(7x) = (5x + o(x))^3 \cdot \left(1 - \frac{(7x)^2}{2} + o(x^2)\right)^3 = \\ &= (125x^3 + o(x^3)) \cdot \left(1 - \frac{147}{2}x^2 + o(x^2)\right) = 125x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

В общем виде многочлена Тейлора третья производная содержится в коэффициенте при x^3 . В силу единственности разложения, приравняем эти коэффициенты при x^3 : $\frac{y'''(0)}{3!} = 125$, откуда находим $y'''(0) = 125 \cdot 3! = 750$.

358. Преобразуем функцию к виду

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin(x^7 + x^8) + \sin(x^7 - x^8)).$$

Раскладывая функции по формуле Маклорена, получаем

$$\begin{aligned} \sin(x^7 + x^8) &= (x^7 + x^8) - \frac{1}{3!}(x^7 + x^8)^3 + o(x^{24}) = \\ &= x^7 + x^8 - \frac{1}{6}(x^{21} + 3x^{22} + 3x^{23} + x^{24}) + o(x^{24}), \\ \sin(x^7 - x^8) &= (x^7 - x^8) - \frac{1}{3!}(x^7 - x^8)^3 + o(x^{24}) = \\ &= x^7 - x^8 - \frac{1}{6}(x^{21} - 3x^{22} + 3x^{23} - x^{24}) + o(x^{24}), \end{aligned}$$

тогда

$$f(x) = \frac{1}{2} (\sin(x^7 + x^8) + \sin(x^7 - x^8)) = x^7 - \frac{1}{6}x^{21} - \frac{1}{2}x^{23} + o(x^{24}).$$

Так как коэффициент $\left(-\frac{1}{2}\right)$ при x^{23} равен $\frac{f^{(23)}(0)}{23!}$, то отсюда находим

$$f^{(23)}(0) = -\frac{23!}{2}.$$

359. Домножив числитель и знаменатель на $1 - x$, представим функцию в виде:

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3} - \frac{x}{1-x^3},$$

и, используя готовые разложения, получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x^3 + x^6 + \dots) - x(1 + x^3 + x^6 + \dots) = \\ &= 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \dots + (x^{3n} - x^{3n+1}) + \dots \end{aligned}$$

Поскольку $f^{(50)}(0) = 50!a_{50}$, то необходимо найти коэффициент при x^{50} . Число 50 при делении на 3 дает остаток 2, т. е. оно представимо в виде $3n+2$, но такие степени в данном разложении отсутствуют (это 2, 5, 8,...). Значит, $a_{50} = 0$ и $f^{(50)}(0) = 0$.

360. Решение.

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{a}} \right) = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } f(x) &= \frac{1}{a-x} = \frac{1}{(a-b)-(x-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{1-\frac{x-b}{a-b}} \right) = \\ &= \frac{1}{a-b} \left(1 + \frac{x-b}{a-b} + \frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}; \end{aligned}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{1}{a-x} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{a}{x}-1} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{a}{x}} = -\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}.$$

361. $a = 2$, $b = -2$, $c = -\frac{8}{3}$. Решение.

$$\begin{aligned} e^{2x-x^2} &= 1 + 2x - x^2 + \frac{1}{2}(2x - x^2)^2 + \frac{1}{6}(2x - x^2)^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3); \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+bx^2}} = (1+bx^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{bx^2}{2} + o(x^2), \text{ тогда}$$

$$(1+ax)(1+bx^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+ax) \left(1 - \frac{bx^2}{2} + o(x^2) \right) =$$

$$= 1 + ax - \frac{bx^2}{2} - \frac{abx^3}{2} + o(x^3).$$

Подставляя в левую часть равенства, получим:

$$\begin{aligned} e^{2x-x^2} - \frac{1+ax}{\sqrt{1+bx^2}} &= \left(1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right) - \left(1 + ax - \frac{bx^2}{2} - \frac{abx^3}{2} + o(x^3)\right) = \\ &= (2-a)x + \left(1 + \frac{b}{2}\right)x^2 + \left(\frac{ab}{2} - \frac{2}{3}\right)x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2-a=0; \\ 1+\frac{b}{2}=0; \\ \frac{ab}{2}-\frac{2}{3}=c, \end{cases} \quad \text{т. е. при} \quad \begin{cases} a=2; \\ b=-2; \\ c=-\frac{8}{3}. \end{cases}$$

362. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{12}, c = -\frac{1}{2}, d = \frac{1}{12}$. Решение. Перепишем равенство в виде $e^x(1+cx+dx^2) = 1+ax+bx^2+o(x^4)$, или, подставляя разложение экспоненты,

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)(1 + cx + dx^2) = 1 + ax + bx^2 + o(x^4).$$

Перепишем равенство в виде:

$$\begin{aligned} (1+c-a)x + \left(d+c+\frac{1}{2}-b\right)x^2 + \left(d+\frac{c}{2}+\frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{d}{2}+\frac{c}{6}+\frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4) = \\ = o(x^4), \text{ что возможно тогда и только тогда, когда} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1+c-a=0; \\ d+c+\frac{1}{2}-b=0; \\ d+\frac{c}{2}+\frac{1}{6}=0; \\ \frac{d}{2}+\frac{c}{6}+\frac{1}{24}=0, \end{cases} \quad \text{т. е. при} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{2}; \\ b=\frac{1}{12}; \\ c=-\frac{1}{2}; \\ d=\frac{1}{12}. \end{cases}$$

363. Перепишем равенство в виде

$$3 \sin 2x = (2 + \cos 2x)(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)), \quad x \rightarrow 0.$$

Подставляя разложения для синуса и косинуса, имеем:

$$3 \left(2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + o(x^5)\right) =$$

$$= \left(2 + 1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} + o(x^5) \right) (ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)).$$

Раскрывая скобки, упрощая и удерживая члены не выше 5-го порядка, получим:

$$6x - 4x^3 + \frac{4x^5}{5} + o(x^5) = 3ax + (3b - 2a)x^3 + \left(\frac{2a}{3} - 2b + 3c \right) x^5 + o(x^5),$$

откуда находим

$$\begin{cases} 6 = 3a; \\ -4 = 3b - 2a; \\ \frac{4}{5} = \frac{2a}{3} - 2b + 3c; \end{cases} \quad \text{т. е. при} \quad \begin{cases} a = 2; \\ b = 0; \\ c = -\frac{8}{45}. \end{cases}$$

Итак, $\frac{3 \sin 2x}{\cos 2x + 2} = 2x - \frac{8}{45}x^5 + o(x^5), x \rightarrow 0$.

364. Разложим функцию по формуле Маклорена:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - (1 + ax^2)(1 - bx^2 + b^2x^4 + o(x^4)) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - (1 + ax^2 - bx^2 - abx^4 + b^2x^4) + o(x^4) = \\ &= x^2 \left(-\frac{1}{2} - a + b \right) + x^4 \left(\frac{1}{24} + ab - b^2 \right) + o(x^4). \end{aligned}$$

Функция будет бесконечно малой как можно более высокого порядка малости, когда

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} - a + b = 0; \\ \frac{1}{24} + ab - b^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{12}; \\ b = \frac{1}{12}. \end{cases}$$

365. Применим формулу Маклорена к функции $f(x) = \sin x$ и выпишем её разложение с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\sin x = x - \frac{\sin \xi}{2!} \cdot x^2,$$

откуда следует, что $|\sin x - x| = \left| \frac{\sin \xi}{2!} \cdot x^2 \right| \leq \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

366. Имеем $\Delta f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = \sin x_0 \cdot \cos \Delta x + \cos x_0 \cdot \sin \Delta x - \sin x_0$
 $= \sin x_0 (\cos \Delta x - 1) + \cos x_0 \cdot \sin \Delta x = \sin x_0 \left(-\frac{(\Delta x)^2}{2} + o((\Delta x)^2) \right) + \cos x_0 (\Delta x + o(\Delta x))$
 $= \cos x_0 \cdot \Delta x + o(\Delta x)$. Отсюда $df(x_0) = \cos x_0 \cdot \Delta x = \cos x_0 dx$.

367. Представим число в виде

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4 \left(1 + \frac{1}{4}\right)} = 2 \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценку числа членов в биномиальном разложении $(1 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ по формуле Маклорена для достижения заданной точности можно получить из оценки остаточного члена в форме Лагранжа:

$$\left| R_n \left(\frac{1}{4} \right) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)} \left(\frac{\theta}{4} \right)}{(n+1)!} \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}-n)(1 + \frac{\theta}{4})^{\frac{1}{2}-n-1}}{(n+1)!} \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right|.$$

В данном случае оценим точность приближения при $n = 2$:

$$\left| R_2 \left(\frac{1}{4} \right) \right| = \left| \frac{f^{(3)} \left(\frac{\theta}{4} \right)}{3!} \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(1 + \frac{\theta}{4})^{-\frac{5}{2}}}{3!} \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right| < \frac{1}{1024}.$$

Таким образом, если написать разложение до члена 2-го порядка включительно, получим, что точное значение $\sqrt{5}$ отличается от полученного приближения

$$\sqrt{5} = 2 \left(1 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right)$$

на величину, меньшую $1/512$.

368. Рассмотрим формулу Тейлора на промежутке $[0, 1]$ и оценим остаточный член в форме Лагранжа, где $\xi \in (0, 1)$:

$$\left| e^x - 1 - x - \dots - \frac{x^n}{n!} \right| = |R_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!} <$$

$< 3/(n+1)!$

369. Поскольку $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots = x - \frac{x^3}{6} + R_4(x)$, то при $|\xi| < |x|$ (можно было воспользоваться нечётностью функции и считать $0 < \xi < x$)

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| = |R_4(x)| = \left| \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot x^5 \right| = \frac{|\cos(\xi)|}{5!} \cdot |x|^5 \leq \frac{1}{120} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{3840}.$$

Таким образом, абсолютная погрешность не превосходит $1/3840$.

370. Имеем $\sqrt{5} = \sqrt{1+4} = \sqrt{4(1 + \frac{1}{4})} = 2(1 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$. Оценим число членов в разложении по формуле Маклорена для достижения заданной точности.

Оценку количества членов n можно получить из оценки остаточного члена в форме Лагранжа:

$$2 \cdot \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n < 10^{-4}.$$

Найдя отсюда n , затем можно получить искомое приближение

$$\begin{aligned} \sqrt{5} \approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} \cdot \frac{1}{4^3} + \dots \right. \\ \left. + \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{4^n} \right) \approx 2,2361. \end{aligned}$$

371. Представим $\sqrt{2}$ в виде $\sqrt{\frac{50}{25}} = \sqrt{\frac{50}{49} \cdot \frac{49}{25}} = \frac{7}{5} \sqrt{1 + \frac{1}{49}}$. Тогда, используя разложение $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, получим

$$\sqrt{2} \approx \frac{7}{5} \left(1 + \frac{1}{98} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{49^2} \right) = 1,4(1 + 0,0102 - 0,0005) = 1,4142.$$

При этом легко проверить, что точность приближения

$$\frac{7}{5} \left| R_2 \left(\frac{1}{49} \right) \right| = \frac{7}{5} \left| \frac{f^{(3)} \left(\frac{\theta}{49} \right)}{3!} \left(\frac{1}{49} \right)^3 \right| = \frac{7}{5} \left| \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(1 + \frac{\theta}{49})^{-\frac{5}{2}}}{3!} \left(\frac{1}{49} \right)^3 \right| <$$

$< 7,5 \cdot 10^{-7} < 1/10^4$ оказывается достаточной. Можно было провести вычисления и так:

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} \left(\frac{49}{50} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{5} (1 - 0,02)^{-\frac{1}{2}} = 1,4(1 + 0,01 + 0,00015) = 1,41421,$$

воспользовавшись разложением $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}$.

372. Из того, что при $t^2 < 1$ имеем

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + \dots \quad (1)$$

и $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x$, интегрируя равенство (1) в пределах от 0 до x ($-1 < x < 1$), получаем искомое разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

8 СЕМИНАР: Неопределённый интеграл и методы его вычисления

«Много из математики не остаётся в памяти, но когда поймёшь её, тогда легко при случае вспомнить забытое».

М.В. Остроградский (1801–1862) – выдающийся русский математик. Именем Остроградского назван эллиптический интеграл, который Михаил Васильевич впервые сумел взять в 1837 году.

Полностью он называется интегралом Эрмита–Остроградского, потому что ту же работу одновременно и независимо проделал француз Шарль Эрмит. Известен исторический анекдот об этом интеграле. Руководивший строительством железной дороги из Петербурга в Москву Петр Клейнмихель доложил царю, что в одном месте придётся обходить возвышенность, так как профиль местности не поддаётся расчёту. Вычисления приводят к эллиптическому интегралу, а такие интегралы не берутся. Российский самодержец, однако, начертил на рапорте Клейнмихеля: «Повелеваю интегрировать». Тот кинулся за помощью в университет, и молодой профессор Остроградский уже через месяц дал решение эллиптических интегралов.

8.1 Первообразная и неопределённый интеграл

Рассмотрим задачу восстановления функции по её известной производной. Это важнейшая задача интегрального исчисления, называемая *интегрированием*. Процедура интегрирования является обратной процедуре дифференцирования.¹

Понятие первообразной.² Пусть на интервале (a, b) , возможно бесконечном, определена функция одной действительной переменной $f(x)$.

Опр. 1 (*точной первообразной*). Функция $F(x)$ называется *точной пер-*

¹*Интегральное исчисление* – раздел математики, в котором изучаются свойства интегралов и связанных с ними процессов интегрирования. Простейшими понятиями И.И. являются неопределённый интеграл и определённый интеграл. Этот раздел тесно связан с дифференциальным исчислением, вместе с которым составляет одну из основных частей математического анализа. *Большой энциклопедический словарь* [12].

²От слова «образ». Здесь «плавающее» ударение, иногда допускается ударение «первообразная».

вообразной по отношению к функции $f(x)$ на интервале (a, b) ,¹ если в любой точке этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$ (или, что то же самое, $f(x)dx$ служит дифференциалом для $F(x)$: $dF(x) = f(x)dx$).

Пример 94. Функция $\sin x$ является точной первообразной для функции $\cos x$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$, поскольку $(\sin x)' = \cos x$. $\square$

Заметим, что если функция $f(x)$ имеет на (a, b) хотя бы одну первообразную функцию $F(x)$, то она имеет на этом интервале сразу бесконечное множество первообразных, поскольку любая функция вида $F(x) + C$, где C – произвольное действительное число, также будет удовлетворять определению первообразной. Более того, если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на (a, b) , то любая другая первообразная $\bar{F}(x)$ для этой функции на данном интервале имеет вид $\bar{F}(x) = F(x) + C$, где C – некоторое действительное число. Таким образом, любые две первообразные одной функции могут отличаться только на константу. Подчеркнём, что в силу дифференцируемости первообразная всегда является непрерывной функцией.

Не всякая функция имеет на заданном интервале первообразную в приведённом выше строгом смысле слова, потому что не всякая функция является производной от другой функции. Но если функция $f(x)$, определённая на (a, b) , имеет на этом множестве первообразную, то она называется *интегрируемой* на нём. Расширить класс интегрируемых функций позволило введение понятия обобщённой первообразной.

Опр. 2 (*обобщённой первообразной*). Функция $F(x)$ называется *обобщённой первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b) , если: 1) $F(x)$ непрерывна на (a, b) ; 2) в любой точке $x \in (a, b)$, за исключением, быть может, множества точек K , функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$. При этом в случае конечного интервала (a, b) множество K состоит не более чем из конечного числа точек. Если же интервал (a, b) бесконечен, т. е. имеет вид $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ или $(-\infty, +\infty)$, то множество K может быть счётным, но при этом каждый конечный подинтервал из (a, b) не должен содержать более конечного числа точек K .

Таким образом, в отличие от определения точной первообразной, в понятии обобщённой первообразной допускается, что производная может не существовать в отдельных точках интервала интегрирования. Если нет необходимости подчёркивать, что мы имеем дело именно с точной или обобщённой первообразной, то будем называть $F(x)$ просто первообразной.

¹Под *точной первообразной* для $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ будем понимать функцию $F(x)$, имеющую производную $F'(x)$ в любой внутренней точке сегмента, равную $f(x)$, и, кроме того, имеющую правую производную $F'(a+0)$, равную $f(a+0)$, и левую производную $F'(b-0)$, равную $f(b-0)$.

Пример 95. Найти общий вид первообразной для функции $f(x) = e^{|x|}$ на всей числовой прямой.

Решение. При $x > 0$ получаем $f(x) = e^x$ и первообразная имеет вид $F(x) = e^x + C_1$, где $C_1 \in \mathbb{R}$. При $x < 0$ имеем $f(x) = e^{-x}$ и, соответственно, её первообразная имеет вид $F(x) = -e^{-x} + C_2$, где $C_2 \in \mathbb{R}$.

Учтём теперь непрерывность первообразной в точке $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0-0} (-e^{-x} + C_2) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (e^x + C_1)$, откуда находим $C_2 = C_1 + 2$. Таким образом, общий вид любой из первообразных следующий:

$$F(x) = \begin{cases} e^x + C_1, & \text{если } x \geq 0; \\ -e^{-x} + C_1 + 2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Отметим, что так как

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(e^x + C_1) - (1 + C_1)}{x} = 1,$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{(-e^{-x} + C_1 + 2) - (1 + C_1)}{x} = 1,$$

то $F(x)$ дифференцируема всюду, включая точку $x = 0$, т. е. мы нашли точную первообразную. $\square$

Понятие неопределённого интеграла. Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на промежутке (a, b) называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на этом множестве и обозначается $\int f(x)dx$.¹ Иными словами, с учётом сказанного выше, справедливо

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на (a, b) , C – произвольная действительная константа. При этом символ $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией (если интеграл существует, то функция называется интегрируемой), $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а dx – её дифференциалом. Область интегрирования (a, b) обычно можно определить из контекста задачи (чаще всего это промежутки непрерывности $f(x)$). Например, $\int 0dx = C$, $\int dx = x + C$.

Пример 96. [7, № 1648] Найти неопределённый интеграл

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

¹Символ $\int$ есть стилизованное удлинённое S (первая буква слова «Summa»), был предложен для обозначения интеграла Г. Лейбницем (1686). Термин «первообразная» («примитивная» – *уст.*) функция ввёл Дж. Лагранж (1797) Термин «интеграл» впервые употребил в печати Я. Бернулли (1690), после чего вошло в обиход и выражение «интегральное исчисление».

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx &= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx = \int |\cos x - \sin x| dx = \\ &= \begin{cases} \sin x + \cos x + C, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \\ -\sin x - \cos x + C_1, & \text{если } \frac{\pi}{4} < x \leq \pi. \end{cases}\end{aligned}$$

В точке $x = \frac{\pi}{4}$ запишем условие непрерывности первообразных:

$$\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} + C = -\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} + C_1,$$

откуда $C_1 = C + 2\sqrt{2}$. Таким образом, имеем

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \begin{cases} \sin x + \cos x + C, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \\ -\sin x - \cos x + C + 2\sqrt{2}, & \text{если } \frac{\pi}{4} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Замечание. Иногда в данной задаче приводят ответ в виде

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx = (\sin x + \cos x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C.$$

Надо понимать, что это не вполне корректно. Действительно, так выглядит неопределённый интеграл на каждом из промежутков $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$. Однако на всём отрезке $[0, \pi]$ интеграл равен именно выражению, полученному нами выше. $\square$

Вообще, если в условии задачи сказано, что надо вычислить неопределённый интеграл, но не указано, на каком именно промежутке, то это подразумевает, что его требуется вычислить на области интегрируемости подынтегральной функции. И, строго говоря, в ответе следует указывать эту область интегрируемости, например

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (x \neq 0).$$

Такая запись означает, что данная формула справедлива для любого интервала, не содержащего внутри себя значение $x = 0$ (в том числе для каждого из бесконечных интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$). Эта форма ответа в данном случае единственно возможная, так как найти интеграл на объединении этих промежутков нельзя, поскольку первообразные терпят разрыв 2-го рода в точке $x = 0$.

Иногда при вычислении интеграла применяется искусственный приём деления на некоторое выражение, которое, естественно, тогда не должно обращаться в нуль. Допустим, это выражение равно нулю при $x = x_0$. Тогда вычисляют

интеграл при $x \neq x_0$, а в конце, если при этом значении x_0 ни подынтегральная функция, ни первообразные не имеют особенностей (определены и непрерывны), доопределяют полученное выражение для первообразных в точке x_0 их предельными значениями.

Пример 97. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx$.

Решение. Подынтегральная функция определена, непрерывна и, следовательно, интегрируема при всех действительных x . При $x \neq 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx &= \int \frac{\cancel{x^2}(1 - \frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(x + \frac{1}{x} + 1)^2} dx = \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x} + 1)^2} = \\ &= \int \frac{du}{(u + 1)^2} = -\frac{1}{u + 1} + C = -\frac{x}{x^2 + x + 1} + C. \end{aligned}$$

В точке $x = 0$ подынтегральная функция и её первообразные $-\frac{x}{x^2 + x + 1} + C$ непрерывны, поэтому полученный для интеграла результат можно считать верным и при $x = 0$, если доопределить каждую первообразную её значением в нуле.

Ответ: $-\frac{x}{x^2 + x + 1} + C, x \in \mathbb{R}$. $\square$

Обратим внимание читателя ещё на одно обстоятельство. Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2 - a^2}$ или $\sqrt{\frac{x - a}{x + a}}$, то в этом случае первообразная ищется на луче $x > a$ или на луче $x < -a$. Так как обычно нет никаких оснований предпочесть один луч другому, то часто выбирают тот луч, на котором будет более простая запись преобразованного подынтегрального выражения, т. е. луч $x > a$ (на другом луче $x < -a$ первообразная находится совершенно аналогичными рассуждениями). Это позволяет при упрощении радикалов однозначно раскрывать модули. В этой же ситуации при записи ответа (и непосредственно интегрировании) можно использовать функцию сигнум.

Интегралы, выражаемые и невыражаемые в элементарных функциях. Трудность интегрального исчисления сравнительно с дифференциальным исчислением состоит в том, что неопределённый интеграл от элементарной функции может не быть элементарной функцией. Даже в тех случаях, когда интеграл выражается через элементарные функции (т. е., как говорят, берётся в конечном виде), нет единых рецептов, которые позволяли бы найти такое выражение. В то же время различные способы интегрирования рассматриваются в курсе математического анализа, существуют обширные таблицы интегралов.

Известны сравнительно немногие общие классы функций, для которых интегрирование может быть выполнено в конечном виде. Обычно их и изучают

в курсе высшей школы. В частности, важный класс функций, интегралы от которых берутся в конечном виде, представляют собой рациональные алгебраические функции в виде отношения двух многочленов $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Многие иррациональные алгебраические функции, например, рационально зависящие от $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ и x или же от x и рациональных степеней дроби $\frac{ax + b}{cx + d}$, также интегрируются в конечном виде. В конечном виде интегрируются и некоторые трансцендентные функции, например, рациональные функции синуса и косинуса.

Доказано, что *любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ всегда имеет на интервале (a, b) первообразную, в качестве которой можно взять определённый интеграл с переменным верхним пределом: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ($a < x < b$). Поэтому все элементарные функции интегрируемы на всех интервалах, входящих в их области определения. Однако в результате интегрирования далеко не всегда получаются снова элементарные функции, как это имеет место при дифференцировании.*

Функции, которые изображаются неопределёнными интегралами, не берущимися в конечном виде, образуют собой новые трансцендентные функции. Многие из них также хорошо изучены. К ним относятся, например,

$$\text{интеграл Пуассона : } \int e^{-x^2} dx,$$

$$\text{интегралы Френеля : } \int \sin(x^2) dx, \int \cos(x^2) dx,$$

$$\text{интегральный логарифм : } li(x) = \int \frac{dx}{\ln x},$$

интегральные синус и косинус :

$$si(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad ci(x) = \int \frac{\cos x}{x} dx,$$

$$\text{интегральная показательная функция : } ei(x) = \int \frac{e^x}{x} dx.$$

Не вычисляются в элементарных функциях интегралы $\int \frac{e^x}{x^n} dx$, $\int \frac{\sin x}{x^n} dx$, $\int \frac{\cos x}{x^n} dx$ ($x \in \mathbb{N}$) и многие другие. Так, интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + \delta}) dx$, где R – некоторая рациональная функция, как правило, уже не выражаются в конечном виде через элементарные функции. Функции, сами не являющиеся элементарными, но определяемые через них с помощью аналитических соотношений типа интегрирования и дифференцирования, обычно называют *специальными функциями*.

8.2 Основные свойства неопределённого интеграла. Таблица простейших интегралов

*«Относись ко всем с добром и уважением, даже к тем, кто с тобой груб.
Не потому, что они достойные люди, а потому, что
ты – достойный человек».*

*Конфуций (ок. 551 до н. э. – 479 до н. э.) – выдающийся
древнекитайский философ и мыслитель, чьи воззрения
стали парадигмой философской системы конфуцианства.*

Основные свойства неопределённого интеграла следуют из его определения.

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$, $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
2. $\int dF(x) = F(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) (эти свойства отражают взаимно обратный характер операций интегрирования и дифференцирования).
3. $\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx$, где $C \neq 0$ (постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла).
4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (подразумевается, что обе функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на одном и том же множестве). Свойства 3 и 4 отражают свойство линейности неопределённого интеграла, причём эти равенства носят условный характер: они выполняются лишь с точностью до произвольной константы.

Следующее свойство 5 показывает, что приведённая ниже таблица интегралов справедлива независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или функцией.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$.
6. Одна из первообразных чётной функции есть функция нечётная, а всякая первообразная нечётной функции есть функция чётная.

Рассмотрим далее табличные интегралы и наиболее общие методы вычисления неопределённых интегралов. К ним традиционно относят следующие: сведение интеграла к простейшим интегралам при помощи тождественных преобразований и использования свойств интегралов, метод замены переменной и интегрирование по частям. Обратим внимание на то, что *приписывать константу C в неопределённом интеграле нужно обязательно*, в противном случае вы находите лишь одну из первообразных, и это считается весьма грубой ошибкой. Кроме того, надо приучить себя при вычислении неопределённых интегралов всегда *указывать область интегрирования* (аналог ОДЗ в уравнениях и неравенствах, области определения функций). Заметим также, что ниже мы будем говорить об интегралах только для непрерывных функций. Если же функция имеет точки разрыва, то рассматривать её будем лишь в промежутках её непрерывности, где интеграл от неё существует.

Таблица простейших интегралов.

Отметим, что название «табличный интеграл» является довольно условным. Существует некоторый минимальный набор неопределённых интегралов, к которым наиболее часто сводится вычисление интегралов. В частности, к ним относят интегралы от известных элементарных функций. По мере того как вы приобретаете всё больше навыков в вычислении неопределённых интегралов, понятие «табличного интеграла» расширяется, и в условную таблицу попадают многие из вычисленных прежде интегралов. Правильность выполнения интегрирования в случае сомнений всегда можно проверить, продифференцировав полученный результат. Приведём лишь некоторые, наиболее часто употребляемые виды интегралов.

Интегралы от степенных функций:

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\});$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (x \neq 0).$$

Интегралы от показательных (в частности, экспоненциальной при $a = e$) функций:

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}), \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

Интегралы от тригонометрических функций:

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C \quad (x \in \mathbb{R});^1$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C \quad (x \in \mathbb{R});$$

¹К вопросу о неопределённых интегралах вспоминается старый анекдот. Американский профессор математики приезжает в гости в Советский Союз к нашему профессору. Сидят они в ресторане и русский говорит:

– Ты знаешь, у нас в стране такой уровень образования, что все знают даже высшую математику.

– Не может быть!

Сидят дальше, русский выходит в туалет, по пути подзывает официантку и говорит:

– Когда я тебя спрошу, чему равен интеграл от косинуса, ты скажешь – «минус синус». Поняла?

– Поняла.

Через некоторое время он как бы невзначай возобновляет разговор на тему образования с американским профессором:

– Давай спросим что-нибудь из высшей математики – ну хотя бы у этой официантки?

– Давай!

Подзывают:

– Чему равен интеграл от косинуса?

Официантка:

– Минус синус.

Американец:

– О–о–о, это потрясающе!!!

Через некоторое время официантка опять подходит к их столику и говорит:

– Извините, чуть не забыла – плюс константа!

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z});$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}).$$

Интегралы от рациональных функций:

$$8. \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}; \text{этот интеграл подразумевает двоя-}$$

кую форму записи; в зависимости от ситуации можно использовать как первое, так и второе его представление);

$$9. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}); \text{здесь и ниже параметр } a \text{ счита-}$$

ем положительным;

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \quad (x \neq \pm a);$$

Интегралы от иррациональных функций:

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad (|x| < 1);$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases} \quad (|x| < a);$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (x^2 \pm a^2 > 0);$$

$$14. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (|x| \leq a);$$

$$15. \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

Интегралы от гиперболических функций:

$$16. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$17. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$18. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$19. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0).$$

Существуют специальные (пополняемые) таблицы неопределённых интегралов, содержащие большое количество ныне известных интегралов, к которым можно обращаться в случае необходимости.

8.3 Основные методы интегрирования

«Напрасно думают, что она (фантазия) нужна только поэту. Это глупый предрассудок! Даже в математике она нужна, даже открытие дифференциального и интегрального исчисления невозможно было бы без фантазии».

В.И. Ленин (1870–1924) – российский революционер, крупный теоретик марксизма, советский политический и государственный деятель, главный организатор и руководитель Октябрьской революции 1917 года в России.

Практически любой неопределённый интеграл вычисляется путём его упрощения и сведения в конечном итоге к табличному (табличным) интегралу. Специфика используемых при этом математических средств позволяет отнести к основным методам интегрирования следующие три способа интеграции:

- использование алгебраических, тригонометрических и прочих преобразований, а также свойств интегралов;
- замена переменной интегрирования;
- интегрирование по частям.

Заметим, что в любой более-менее сложной задаче обычно в различных комбинациях используются сразу несколько приёмов. В частности, при вычислении интеграла замена переменных (или интегрирование по частям) могут использоваться неоднократно, сопровождаясь упрощающими решение преобразованиями подынтегрального выражения.

8.3.1 Интегрирование путём сведения к табличным интегралам

Иногда интеграл удастся вычислить, не прибегая к замене переменной или интегрированию по частям, а просто с помощью различных алгебраических, тригонометрических и других преобразований подынтегрального выражения и используя свойство линейности интегралов. К преобразованиям такого рода относят обычно следующие.

1. Добавление (с одновременным вычитанием) к подынтегральной функции константы или некоторого выражения; обычно за этим следует разбиение интеграла в сумму более простых интегралов.

Пример 98. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{x+1}$.

Решение. $\int \frac{(x+1)-1}{x+1} dx = \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln|x+1| + C \quad (x \neq -1). \quad \square$

Аналогичным приёмом вычисляется интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

2. Одновременное умножение или деление числителя и знаменателя дроби под знаком интеграла на некоторое выражение. Например, при интегрировании функций с радикалами часто применяют домножение на сопряжённое выражение.

Пример 99. [7, № 1729] Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

Решение. При $x \geq 1$ умножим и разделим подынтегральное выражение на сопряжённое к знаменателю:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} &= \frac{1}{2} \int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{x-1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} d(x+1) - \frac{1}{2} \int \sqrt{x-1} d(x-1) = \frac{1}{3} \left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3} \right) + C. \quad \square \end{aligned}$$

3. Выделение у дроби целой части (часто используется при интегрировании рациональных дробей).

Пример 100. Вычислить интеграл $\int \frac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1} dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1} dx &= \int \frac{2x(x+1) - 5x - 1}{x + 1} dx = \int \frac{2x(x+1) - 5(x+1) + 4}{x + 1} dx = \\ &= \int \left(2x - 5 + \frac{4}{x+1} \right) dx = x^2 - 5x + 4 \ln |x+1| + C \quad (x \neq -1). \quad \square \end{aligned}$$

4. Использование алгебраических, тригонометрических, гиперболических и логарифмических формул и т. п.

Пример 101. Вычислить $\int (2^{\ln x} - x^{\ln 2}) dx$.

Решение. Воспользуемся известным свойством логарифмов $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$:

$$\int (2^{\ln x} - x^{\ln 2}) dx = \int (2^{\ln x} - 2^{\ln x}) dx = C \quad (x > 0)$$

(подынтегральная функция равна тождественно нулю). $\square$

8.3.2 Интегрирование путем замены переменной

«Те, кто читают книги, всегда будут управлять теми, кто их не читает».

Современные интерпретации: *«Те, кто читают книги, всегда будут управлять теми, кто сидит в соцсетях (смотрит телевизор)».*

Фелисите де Жанлис (1746–1830), французская писательница, автор сентиментальных романов,

*пользовавшихся широкой популярностью во всей Европе.
Воспитательница детей в семье герцога Шартрского,
в том числе будущего короля Франции Луи-Филиппа I.*

Изложим один из сильнейших приёмов для интегрирования функций – метод замены переменной, или метод подстановки. Рассмотрим два возможных случая.

1. Внесение функции под знак дифференциала. Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где функция $g(t)$ непрерывна на множестве T , а функция $t = t(x)$ – непрерывна на соответствующем множестве X вместе со своей производной $t'(x)$, то справедлива следующая формула перехода от x к новой переменной интегрирования t :

$$\int f(x)dx = \int g(t(x))t'(x)dx = \int g(t)dt. \quad (1)$$

При этом производная $t'(x)$ вносится под знак дифференциала согласно известному свойству дифференциала $t'(x)dx = d(t(x))$. В простейших случаях, чтобы распознать эту ситуацию, бывает достаточно знания табличных интегралов, например,

$$2xdx = d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \sin x dx = -d(\cos x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x),$$

$$\frac{dx}{x^2 + 1} = d(\arctg x), \quad \frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}), \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x), \quad e^{2x} dx = d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right).$$

В более сложных случаях могут потребоваться приобретённый ранее опыт и интуиция:

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d\left(\sqrt{1+x^2}\right), \quad \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = d\left(x + \frac{1}{x}\right) \text{ и т. п.}$$

Подобную замену переменной интегрирования осуществляют в тех случаях, когда получаемая в результате «новая» подынтегральная функция $g(t)$ удобнее для интегрирования по сравнению с исходной подынтегральной функцией $f(x)$. Основная сложность этого метода состоит в том, чтобы «увидеть» в исходном подынтегральном выражении $f(x)dx$ более простое для интегрирования выражение $g(t(x))t'(x)dx = g(t)dt$. Практически реализация метода заключается во внесении функции $t'(x)$ под знак дифференциала dx с образованием нового дифференциала dt . Вычислив интеграл $\int g(t)dt = G(t) + C$, в конце необходимо вернуться к первоначальной переменной интегрирования x путём обратной подстановки $t = t(x)$:

$$\int f(x)dx = G(t(x)) + C.$$

Пример 102. Вычислить $\int \sin^3 x \cos x dx$.

Решение. Внесём $\cos x$ под знак дифференциала: $\cos x dx = d(\sin x)$, а затем сделаем замену $t = \sin x$:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Осталось лишь вернуться к переменной x , подставляя $\sin x$ вместо t :

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C.$$

Заметим также, что при определённом навыке новую переменную в простых случаях можно в явном виде не вводить, проделав это мысленно. Скажем, в рассмотренном выше примере можно было обойтись без введения новой переменной t . Тогда решение задачи выглядело бы короче:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{(\sin x)^4}{4} + C. \square$$

В следующем примере при сведении интеграла к табличному также не будем вводить новую переменную $t = 5x$, а сразу запишем результат.

Пример 103. Вычислить $\int e^{5x} dx$.

Решение. $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} d(5x) = \frac{1}{5} e^{5x} + C. \square$

2. Использование подстановок. Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на множестве X , то, полагая $x = x(t)$, где функция $x(t)$ непрерывна на соответствующем множестве T вместе со своей производной $x'(t)$, получим ещё одну формулу перехода от x к новой переменной интегрирования t :

$$\int f(x) dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t) dt. \quad (2)$$

Нередки ситуации, когда для решения одной и той же задачи могут существовать различные подстановки. Умение подобрать наиболее эффективную в данной конкретной ситуации подстановку определяет, в том числе, культуру интегрирования учащегося.

Рассмотрим пример задачи, где при вычислении интеграла возможны сразу несколько различных подстановок. Следовательно, возникает проблема выбора наиболее оптимальной из них. А для того чтобы выбрать более удобную подстановку, надо знать их разновидности и области применения. Итак, сравнивайте и выбирайте.

Пример 104. [7, № 1683] Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. 1-й способ (подстановка $t = 1/x$). ОДЗ: $|x| > 1$. Воспользуемся подстановкой $t = \frac{1}{x}$, тогда $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1} = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{|t|}$, и, учитывая тождество $|t| = t \cdot \operatorname{sgn} t$, получаем:¹

$$\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}} = -\operatorname{sgn} t \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{d|t|}{\sqrt{1-|t|^2}} = -\arcsin |t| + C = -\arcsin \frac{1}{|x|} + C.$$

2-й способ (подстановка $t = \sqrt{x^2 - 1}$). Сделаем рационализирующую замену переменной, положив $t = \sqrt{x^2 - 1}$, тогда $x^2 = t^2 + 1$, $x dx = t dt$ и

$$\int \frac{x dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{t dt}{(t^2 + 1)t} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} + C.$$

3-й способ (тригонометрическая подстановка $x = \frac{1}{\sin t}$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$):

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{\cos t}{|\sin t|} = \operatorname{sgn}(\sin t) \cdot \operatorname{ctg} t,$$

$dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$ и для интеграла имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} &= \operatorname{sgn}(\sin t) \int \frac{-\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt}{\frac{1}{\sin t} \cdot \operatorname{ctg} t} = -\operatorname{sgn}(\sin t) \int dt = \\ &= -\operatorname{sgn}(\sin t) \cdot t + C = -\operatorname{sgn}(x) \cdot \arcsin \frac{1}{x} + C = -\arcsin \frac{1}{|x|} + C. \end{aligned}$$

Заметим, что можно было бы вычислить данный интеграл с помощью аналогичной подстановки через косинус: $x = \frac{1}{\cos t}$, где $t \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

4-й способ (гиперболическая подстановка $|x| = \operatorname{ch} t$, $t \geq 0$). Тогда $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = |\operatorname{sh} t|$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} &= \int \frac{d|x|}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{d(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{ch} t \cdot |\operatorname{sh} t|} = \int \frac{\operatorname{sh} t dt}{\operatorname{ch} t \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t) \operatorname{sh} t} = \\ &= \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t) \int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t) \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t) \int \frac{d(\operatorname{sh} t)}{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \end{aligned}$$

¹В операциях интегрирования и дифференцирования с функцией $\operatorname{sgn} x$ можно оперировать как с константой, например:

$$\int \frac{|x|}{x} dx = \int \operatorname{sgn} x dx = \operatorname{sgn} x \int dx = \operatorname{sgn} x \cdot x + C = |x| + C \quad (x \neq 0).$$

$$= \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t) \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} t) + C = \operatorname{arctg} |\operatorname{sh} t| + C = \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} + C = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} + C.$$

5-й способ (1-я подстановка Эйлера, будем изучать позже).

Положим $t = \sqrt{x^2 - 1} + x$, тогда $x^2 - 1 = (t - x)^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 + 1}{2t}$, $dx = \frac{t^2 - 1}{2t^2} dt$ и для интеграла получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{\frac{t^2 - 1}{2t^2} dt}{\frac{t^2 + 1}{2t} \cdot \frac{t^2 - 1}{2t}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 - 1} + x) + C. \quad \square$$

Подчеркнём ещё раз, что замена переменной – наиболее мощный и часто используемый метод при вычислении интегралов от иррациональных и трансцендентных функций. Как правило, подобрать подходящую замену в сложных случаях – целое искусство. В некоторых случаях удаётся сформулировать общие рекомендации по заменам, ориентируясь на конкретный класс интегрируемых функций. Например, разработаны и проверены практикой специальные рационализирующие подстановки при интегрировании иррациональных алгебраических функций; существуют рекомендации по заменам в классе тригонометрических функций. Многие из таких подстановок будут рассмотрены ниже.

8.3.3 Интегрирование по частям

«Кто-то сказал мне, что каждое уравнение, включённое мной в эту книгу, уменьшит доход от её продаж вдвое».

Стивен Уильям Хокинг (1942–2018) – всемирно известный английский физик-теоретик и писатель, который всю свою жизнь посвятил космологии и астрофизике. В 21 год у него диагностировали редкую неизлечимую болезнь, ведущую к параличу и полной атрофии мышц. Тем не менее, Хокинг прожил в таком состоянии более 50 лет. Он занимался наукой, преподавал, путешествовал, вел активную личную жизнь. Его научные работы переведены на 40 языков и изданы тиражом более 25 млн. экземпляров.

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые на одном и том же множестве функции и существует первообразная для функции $u(x)v'(x)$, то существует и первообразная для функции $v(x)u'(x)$, причём справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

или, в краткой форме, $\int u dv = uv - \int v du$. В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx , из которой можно определить v путём интегрирования.

Данный метод используют в тех случаях, когда интеграл в правой части формулы вычисляется проще исходного интеграла (в левой части). Как правило, формула применяется в ситуациях, когда подынтегральная функция представляет собой произведение «разнородных» функций, например, алгебраической и трансцендентной функций. В целом, интегрирование по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной, но есть целые классы интегралов, например,

$$\begin{aligned} &\int x^n e^{ax} dx, \int x^n \sin(ax) dx, \int x^n \ln^m x dx \quad (n, a \in \mathbb{R}, n \neq -1, m \in \mathbb{N}); \\ &\int \sin(\ln x) dx, \int e^{ax} \cos(bx) dx \quad (a, b \in \mathbb{R}), \int P(x) e^{ax} dx, \\ &\int P(x) \sin(ax) dx, \int P(x) \ln x dx, \int P(x) \arcsin x dx, \int P(x) \operatorname{arctg} x dx, \end{aligned}$$

где $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ – целый алгебраический многочлен относительно x , которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям. При этом в интегралах $\int P(x) e^{ax} dx$, $\int P(x) \sin(ax) dx$ за u следует принять $P(x)$, а за dv , соответственно, выражения $e^{ax} dx$, $\sin(ax) dx$; а в интегралах вида $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \arcsin x dx$ за u принимаются, соответственно, функции $\ln x$, $\arcsin x$, а за dv – выражение $P(x) dx$.

В некоторых случаях для получения результата приходится несколько раз интегрировать по частям, постепенно упрощая задачу. Иногда на каком-то этапе обнаруживается, что исходный интеграл выражается через некоторые функции и себя самого, тогда его вычисляют, выражая из данного равенства (рассматривая равенство как уравнение относительно искомого интеграла).

Пример 105. Вычислить $\int x^3 \cdot \ln x dx$.

Решение. Так как дифференцирование $\ln x$ приводит к упрощению, положим $u = \ln x$, $dv = x^3 dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{1}{4} x^4$ и, интегрируя по частям, находим

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C \quad (x > 0).$$

Пример 106. Вычислить $\int \sqrt{x^2 + a} dx \quad (a \neq 0)$.

Решение. Положим $u = \sqrt{x^2 + a}$, $dv = dx$. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$I = \int \sqrt{x^2 + a} dx = x \sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}} = x \sqrt{x^2 + a} - \int \frac{(x^2 + a) - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a} + a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} - I + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|.$$

Отсюда, выражая I , окончательно находим:

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C. \square$$

Пример 107. $\int \arcsin x dx$.

Решение. Положим $u = \arcsin x$, $dv = dx$ ($|x| \leq 1$), тогда $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $v = x$:

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \square \end{aligned}$$

Пример 108. Вычислить $\int (x \cdot \operatorname{tg}^2 x) dx$.

Решение. С учётом $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, имеем $\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = d(\operatorname{tg} x - x)$, поэтому

$$\begin{aligned} \int (x \cdot \operatorname{tg}^2 x) dx &= \int x d(\operatorname{tg} x - x) = x(\operatorname{tg} x - x) - \int (\operatorname{tg} x - x) dx = x \cdot \operatorname{tg} x - x^2 - \\ &- \int \frac{\sin x dx}{\cos x} + \int x dx = x \cdot \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}). \square \end{aligned}$$

Если подынтегральная функция содержит трансцендентную функцию (логарифмическую, показательную, обратную тригонометрическую, гиперболическую и пр.) сложного аргумента $\varphi(x)$, то часто для упрощения подынтегрального выражения бывает полезно сделать замену, приняв этот аргумент за новую переменную интегрирования.

Пример 109. Вычислить $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$.

Решение. Сделаем замену $t = \operatorname{arctg} x$, тогда $\frac{dx}{1+x^2} = dt$ и приходим к интегралу

$$\int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{arctg} x} + C. \square$$

8.4 Задачи для самостоятельного решения

№373. Доказать, что любая первообразная нечётной функции является чётной функцией.

№374. Функция $f(x)$ имеет первообразную на всей числовой прямой и является периодической. Верно ли, что её первообразная тоже периодическая?

Используя понятие обобщённой первообразной, найти неопределённый интеграл:

№375. [7, № 2166] $\int |x|dx, x \in \mathbb{R};$

№376. $\int \frac{dx}{|x|};$

№377. $\int \frac{dx}{\sqrt{|x|}};$

№378. [7, № 2171] $\int \max(1, x^2) dx, x \in \mathbb{R}.$

№379. [7, № 2175] $\int f(x)dx$, где

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\infty < x < 0; \\ x + 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ 2x, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

№380. Найти первообразную функцию для функции $f(x) = |\sin x|$ на сегменте $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Используя различные преобразования, а также, где необходимо, замену переменной, свести интегралы к табличным и вычислить их:

№381. $\int \frac{5x - x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx;$

№382. $\int \frac{dx}{2x^2 - 5};$

№383. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3}};$

№384. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - 4x^2}};$

№385. [7, № 1663] $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}};$

№386. $\int \frac{x - 1}{\sqrt{7 - 9x^2}} dx;$

№387. $\int (5x - 2)^7 x dx;$

№388. $\int \cos \frac{2}{x} \cdot \frac{dx}{x^2};$

№389. $\int x \cdot e^{x^2} dx;$

№390. $\int x \cdot 8^{2-3x^2} dx;$

- №391. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx;$
 №392. $\int \sqrt{\lg(\sin x)} dx;$
 №393. $\int \frac{dx}{\cos x};$
 №394. [7, № 1703] $\int \frac{dx}{\sin x};$
 №395. [7, № 1706] $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x};$
 №396. [7, № 1650] $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$
 №397. [7, № 1652] $\int \operatorname{th}^2 x dx;$
 №398. [7, № 1733] $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)};$
 №399. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)};$
 №400. $\int (1 + 2 \operatorname{sh}^2 x) dx;$
 №401. [7, № 1638] $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx;$
 №402. [7, № 1643] $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^4 - 1}} dx;$
 №403. [7, № 1646] $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx;$
 №404. [7, № 1668] $\int \frac{dx}{1 + \cos x};$
 №405. [7, № 1745] $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx;$
 №406. $\int \frac{\operatorname{cth} x \cdot \operatorname{cth} 5x + 1}{\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} 5x} dx;$
 №407. [7, № 1670] $\int \frac{dx}{1 + \sin x};$
 №408. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 1}};$
 №409. [7, № 1767] $\int x^3(1 - 5x^2)^{10} dx;$
 №410. [7, № 1712] $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$
 №411. [7, № 1725] $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx;$
 №412. [7, № 1726] $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx;$
 №413. $\int \frac{dx}{x(1-x^3)^2}.$

Указание: умножить и разделить на x^2 и сделать подстановку $u = x^3$.

$$\text{№414. [7, № 1737]} \int \frac{xdx}{(x+2)(x+3)};$$

$$\text{№415. [7, № 1718]} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx;$$

$$\text{№416. [7, № 1682]} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}};$$

$$\text{№417. [7, № 1688]} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};$$

$$\text{№418. [7, № 1692]} \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}};$$

$$\text{№419. [7, № 1711]} \int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx;$$

$$\text{№420. [7, № 1719]} \int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx;$$

$$\text{№421. [7, № 1720]} \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}};$$

$$\text{№422. [7, № 1780]} \int \sqrt{1-x^2} dx;$$

Указание. Сделать тригонометрическую подстановку $x = \sin t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\text{№423. [7, № 1782]} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (a > 0);$$

Указание. Сделать тригонометрическую подстановку $x = a \sin t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\text{№424. [7, № 1782]} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (a > 0);$$

Указание. На ОДЗ умножить и разделить на $\sqrt{a+x}$ и разбить на два интеграла.

$$\text{№425. [7, № 1836]} \int \frac{dx}{a+bx^2} \quad (ab \neq 0);$$

$$\text{№426. } \int x^x(1+\ln x)dx.$$

Найти интегралы, используя интегрирование по частям:

$$\text{№427. } \int x^2 \cdot \sin x dx;$$

$$\text{№428. } \int \frac{\ln x dx}{x};$$

$$\text{№429. } \int \frac{\ln x dx}{x^2};$$

$$\text{№430. [7, № 1794]} \int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x dx;$$

$$\text{№431. } \int (x^3 - 3x^2 + 1) \ln x dx;$$

$$\text{№432. } \int \operatorname{arctg}(2x) dx;$$

$$\text{№433. } \int x \cdot \operatorname{arctg} x dx;$$

№434. $[7, \text{№ } 1805] \int x^2 \cdot \arccos x dx;$

№435. $\int \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx;$

№436. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} dx;$

№437. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \ (a > 0);$

№438. $\int (x^2 + x)e^{-x} dx;$

№439. $\int e^{-\sqrt[3]{x+1}} dx;$

№440. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx;$

№441. $\int (x \cdot \operatorname{tg}^4 x) dx;$

№442. $[7, \text{№ } 1826] \int \sin(\ln x) dx;$

№443. $[7, \text{№ } 1827] \int \cos(\ln x) dx;$

№444. $[7, \text{№ } 1828] \int e^{ax} \cos(bx) dx \ (a \neq 0);$

№445. $[7, \text{№ } 1829] \int e^{ax} \sin(bx) dx \ (a \neq 0);$

№446. $\int \frac{x \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx;$

№447. $\int x\sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln(\sqrt{x^2 - 1}) dx.$

Решить задачи, используя процедуру интегрирования:

№448. Разложить по формуле Маклорена до члена $o(x^{2n+1})$ функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Указание: найти разложение для $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$ и проинтегрировать.

8.5 Ответы и решения

373. Пусть $f(x)$ нечётная функция и $F(x)$ – её первообразная. Рассмотрим при любом допустимом x разность $G(x) = F(x) - F(-x)$. Покажем, что $G(x) \equiv 0$. В самом деле, $G'(x) = f(x) + f(-x) = 0$ (из-за нечётности), тогда $G(x) \equiv \text{const}$. Найдём эту константу: $G(x) = G(0) = F(0) - F(0) = 0$. Итак, доказали, что $G(x) \equiv 0$.

374. Вообще говоря, нет. Например, функция $f(x) = 1 + \cos x$ является периодической, а её первообразная $F(x) = x + \sin x$ нет.

375. Для раскрытия модуля рассмотрим два случая.

1) При $x > 0$ имеем $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1$;

2) при $x < 0$ получаем $-\int x dx = -\frac{x^2}{2} + C_2$.

3) В точке $x = 0$, согласно определению первообразной (должна быть непрерывна), имеем

$$\lim_{x \rightarrow -0} F(x) = \lim_{x \rightarrow +0} F(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -0} \left(-\frac{x^2}{2} + C_2 \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right),$$

т. е. $C_1 = C_2 = C$. Поэтому при всех $x \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\int |x| dx = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{sgn} x + C = \frac{x|x|}{2} + C.$$

376. Имеем $\int \frac{dx}{|x|} = \operatorname{sgn} x \int \frac{dx}{x} = \operatorname{sgn} x \cdot \ln |x| + C$.

377. Имеем при $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{|x|}} &= \operatorname{sgn} x \int \frac{\operatorname{sgn} x dx}{\sqrt{|x|}} = \operatorname{sgn} x \int \frac{d(\operatorname{sgn} x \cdot x)}{\sqrt{|x|}} = \\ &= \operatorname{sgn} x \int \frac{d|x|}{\sqrt{|x|}} = \operatorname{sgn} x \cdot 2\sqrt{|x|} + C = \frac{x}{|x|} \cdot 2\sqrt{|x|} + C = \frac{2x}{\sqrt{|x|}} + C. \end{aligned}$$

378. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x^2 \leq 1$, т. е. $|x| \leq 1$, тогда имеем

$$\int \max(1, x^2) dx = \int dx = x + C_1.$$

2) Пусть $x^2 > 1$, т. е. $|x| > 1$, тогда

$$\int \max(1, x^2) dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_2.$$

Поскольку первообразная функция непрерывна, то в точке $x = 1$ должно выполняться равенство

$$1 + C_1 = \frac{1}{3} + C_2 \quad (\text{при } x > 0).$$

Аналогично в точке $x = -1$ имеем

$$-1 + C_1 = -\frac{1}{3} + C_2 \quad (\text{при } x < 0).$$

Итак, при $x > 0$ находим

$$\int \max(1, x^2) dx = \begin{cases} x + C, & \text{если } 0 < x \leq 1; \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

При $x \leq 0$ получаем

$$\int \max(1, x^2) dx = \begin{cases} x + C, & \text{если } -1 \leq x \leq 0; \\ \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C, & \text{если } -\infty < x < -1. \end{cases}$$

Ответ:

$$\int \max(1, x^2) dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C, & \text{если } -\infty < x < -1; \\ x + C, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

379. Интегрируя независимо на различных участках, находим

$$\int f(x) dx = \begin{cases} x + C_1, & \text{если } -\infty < x < 0; \\ \frac{x^2}{2} + x + C_2, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ x^2 + C_3, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Так как первообразная должна быть непрерывна в точках $x = 0$ и $x = 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow -0} (x + C_1) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{x^2}{2} + x + C_2 \right)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\frac{x^2}{2} + x + C_2 \right) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x^2 + C_3),$$

откуда $C_1 = C_2 = C_3 - \frac{1}{2}$. Итак,

$$\int f(x) dx = \begin{cases} x + C, & \text{если } -\infty < x < 0; \\ \frac{x^2}{2} + x + C, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ x^2 + \frac{1}{2} + C, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

380. Раскрывая на данном сегменте модуль и интегрируя, получаем, что одной из первообразных является функция

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + C_1, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0; \\ \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi; \\ -\cos x + C_2, & \text{если } \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

которая непрерывна на этом сегменте. Учитывая условия непрерывности в точках $x = 0$ и $x = \pi$, получаем, что в качестве первообразной можно взять функцию

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + 2, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0; \\ \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi; \\ -\cos x - 2, & \text{если } \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

(можно построить график функции $F(x)$).

381. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{5x - x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \left(\frac{5x}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} \right) dx = 5 \int x^{\frac{2}{3}} dx - \int x^{\frac{7}{6}} dx = \\ &= 5 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C = 3x\sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} + C. \end{aligned}$$

382. Этот интеграл легко сводится к табличному («высокому логарифму») при $x \neq \pm\sqrt{5/2}$:

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2}x)^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}x - \sqrt{5}}{\sqrt{2}x + \sqrt{5}} \right| + C.$$

383. Сведём интеграл к табличному («длинному логарифму»):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}} \right| + C.$$

384. Последовательно сведём интеграл к табличному:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} = -\frac{1}{8} \int \frac{d(1 - 4x^2)}{\sqrt{1 - 4x^2}} = -\frac{1}{8} \frac{(1 - 4x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{4} \sqrt{1 - 4x^2} + C.$$

$$\textbf{385.} \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x + C \quad (x^2 < \frac{2}{3}).$$

386. Представим интеграл в виде разности двух интегралов:

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{7-9x^2}} dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{7-9x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{7-9x^2}} = I_1 - I_2.$$

Вычислим каждый интеграл отдельно.

1) Сделаем замену $t = 7 - 9x^2$, тогда $dt = -18xdx \Rightarrow xdx = -\frac{dt}{18}$ и получаем

$$I_1 = -\frac{1}{18} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{9} \sqrt{t} + C = -\frac{1}{9} \sqrt{7-9x^2} + C.$$

2) Сведём второй интеграл к табличному, заменив $t = 3x$:

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - (3x)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - t^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{t}{\sqrt{7}} + C = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{\sqrt{7}} + C.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{7-9x^2}} dx = -\frac{1}{9} \sqrt{7-9x^2} - \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{\sqrt{7}} + C, \quad \text{где } x^2 < \frac{7}{9}.$$

387. Сделаем замену $t = 5x - 2$, тогда $x = \frac{1}{5}(t+2)$, $dx = \frac{1}{5}dt$ и приходим к интегралу

$$\begin{aligned} \int (5x-2)^7 x dx &= \frac{1}{5} \int (t+2) t^7 \cdot \frac{dt}{5} = \frac{1}{25} \cdot \frac{t^9}{9} + \frac{2}{25} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \\ &= \frac{1}{225} (5x-2)^9 + \frac{1}{100} (5x-2)^8 + C. \end{aligned}$$

388. Сделаем замену $t = \frac{2}{x}$, тогда $dt = -\frac{2dx}{x^2}$ и приходим к интегралу

$$\int \cos \frac{2}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = \int \cos t \left(-\frac{dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \sin t + C = -\frac{1}{2} \sin \frac{2}{x} + C.$$

389. Имеем $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$.

390. Сделаем замену $t = 2 - 3x^2$, тогда $dt = -6xdx \Rightarrow xdx = -dt/6$ и приходим к интегралу

$$\int x \cdot 8^{2-3x^2} dx = -\frac{1}{6} \int 8^t dt = -\frac{1}{6} \cdot \frac{8^t}{\ln 8} + C = -\frac{8^{2-3x^2}}{6 \ln 8} + C.$$

391. Положим $t = 1 + \ln x$, тогда $dt = \frac{dx}{x}$ и при $x > 0$ получаем

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx = \int \sqrt[3]{t} dt = \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} t \sqrt[3]{t} + C = \frac{3}{4} (1 + \ln x) \sqrt[3]{1 + \ln x} + C.$$

392. Найдём область определения функции: $\lg(\sin x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Функция не интегрируема, неопределённый интеграл от неё не существует.

393. Умножим и разделим на $\cos x$ ($\neq 0$):

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + C.$$

394. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx &= - \int \frac{d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

395. 1-й способ. Умножим и разделим на $\operatorname{ch} x$ ($\neq 0$):

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{sh} x)}{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + C.$$

2-й способ. Распишем, по определению, гиперболический косинус:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 2 \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = 2 \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 + 1} = 2 \operatorname{arctg} e^x + C.$$

396. Имеем

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

397. Имеем

$$\int \operatorname{th}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = x - \operatorname{th} x + C.$$

398. Имеем при $x \neq -3; 1$:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)} = \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 - 4} =$$

$$= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 - 2^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C.$$

399. Сформируем в числителе те выражения, которые присутствуют в виде сомножителей в знаменателе дроби, а затем произведём сокращение:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} &= \frac{1}{b-a} \int \frac{(x-a) - (x-b)}{(x-a)(x-b)} dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \int \left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a} \right) dx = \frac{1}{b-a} (\ln |x-b| - \ln |x-a|) + C = \\ &= \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x-b}{x-a} \right| + C \quad (x \neq a, x \neq b, a \neq b). \end{aligned}$$

400. Воспользуемся формулой гиперболического косинуса двойного угла:

$$\int (1 + 2 \operatorname{sh}^2 x) dx = \int \operatorname{ch} 2x dx = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x + C.$$

401. Заметим, что под корнем стоит полный квадрат:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx &= \int \frac{\sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2})^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3} dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \ln |x| - \frac{1}{4x^4} + C \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

402. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx &= \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| - \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + C = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \right| + C. \end{aligned}$$

403. Имеем

$$\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C.$$

404. Имеем

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \int \frac{d \left(\frac{x}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C \quad (x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}).$$

405. Имеем

$$\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx = \int \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3} \right) + \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3} \right) \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos \frac{5x}{6} dx + \frac{1}{2} \int \cos \frac{x}{6} dx = \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + 3 \sin \frac{x}{6} + C.$$

406. Выведем формулу гиперболического котангенса суммы:

$$\operatorname{cth}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ch}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sh}(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta} = \frac{\operatorname{cth} \alpha \operatorname{cth} \beta + 1}{\operatorname{cth} \beta + \operatorname{cth} \alpha}.$$

Тогда выражение под знаком интеграла упрощается (при $x \neq 0$):

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{cth} x \cdot \operatorname{cth} 5x + 1}{\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} 5x} dx &= \int \operatorname{cth}(5x + x) dx = \int \operatorname{cth} 6x dx = \\ &= \int \frac{\operatorname{ch} 6x}{\operatorname{sh} 6x} dx = \frac{1}{6} \int \frac{d(\operatorname{sh} 6x)}{\operatorname{sh} 6x} = \frac{1}{6} \ln |\operatorname{sh} 6x| + C. \end{aligned}$$

407. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x} &= \int \frac{dx}{(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2} = \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} \cdot (1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2})^2} = \\ &= 2 \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{x}{2})}{(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2})^2} = 2 \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1)}{(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1)^2} = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + C. \end{aligned}$$

408. Имеем

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 1}} = \int \frac{d(\sin^2 x + 1)}{\sqrt{\sin^2 x + 1}} = 2\sqrt{\sin^2 x + 1} + C.$$

409. Сделаем замену $t = 1 - 5x^2$, тогда $x^2 = \frac{1-t}{5}$ и получаем

$$\begin{aligned} \int x^3(1 - 5x^2)^{10} dx &= \frac{1}{2} \int x^2(1 - 5x^2)^{10} d(x^2) = \frac{1}{2} \int \frac{1-t}{5} \cdot t^{10} d\left(\frac{1-t}{5}\right) = \\ &= \frac{1}{50} \int (t-1)t^{10} dt = \frac{1}{50} \int (t^{11} - t^{10}) dt = \frac{1}{50} \left(\frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11} \right) + C = \\ &= \frac{1}{50} \left(\frac{(1-5x^2)^{12}}{12} - \frac{(1-5x^2)^{11}}{11} \right) + C. \end{aligned}$$

410. При $x \neq 0$ поделим числитель и знаменатель одновременно на x^2 : $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \int \frac{(1 + \frac{1}{x^2}) dx}{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ и заметим, что $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = d\left(x - \frac{1}{x}\right)$, а $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$, и тогда приходим к табличному интегралу

$$\int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + C.$$

Замечание. Подчеркнём, что мы нашли неопределённый интеграл на каждом из промежутков $x < 0$ и $x > 0$. Если поставить задачу нахождения неопределённого интеграла на всей числовой оси, то вначале необходимо найти хотя бы одну обобщённую первообразную (непрерывную в точке $x = 0$), и затем добавить к ней произвольную константу. Пример нахождения такой обобщённой первообразной на примере функции $e^{|x|}$ был рассмотрен выше в тексте пособия (среди примеров). В данном случае, очевидно, подынтегральная функция не имеет никаких особенностей в точке $x = 0$ (она непрерывна в этой точке), а это означает, что можно действовать так же, и такая обобщённая первообразная существует. При этом константы C_1 и C_2 слева и справа согласуются между собой так, что разрыв в виде скачка значений исчезает и в результате получается единая непрерывная в точке $x = 0$ первообразная. Кратко в этой ситуации говорят, что «в точке $x = 0$ первообразная доопределяется по непрерывности».

411. Разобьём интеграл на два интеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx &= \int \frac{(1+x^2) + 2x}{1+x^2} dx = \int dx + \int \frac{2xdx}{1+x^2} = \\ &= x + \int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = x + \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x + \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

412. Разобьём интеграл на три интеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx &= - \int \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2} dx = - \int \frac{(x^2 - 2) - 4x + 6}{x^2 - 2} dx = \\ &= -x + 4 \int \frac{xdx}{x^2 - 2} - 6 \int \frac{dx}{x^2 - 2} = -x + 2 \int \frac{d(x^2 - 2)}{x^2 - 2} - 6 \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= -x + 2 \ln|x^2 - 2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \ln \left| \frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

413. Используя подстановку $u = x^3$, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(1-x^3)^2} &= \int \frac{x^2 dx}{x^3(1-x^3)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{x^3(1-x^3)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u(1-u)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1-u} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \frac{1}{3} \int \frac{du}{(1-u)^2} + \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \\ &= -\frac{1}{3(1-u)} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u}{1-u} \right| + C = \frac{1}{3(x^3-1)} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3}{1-x^3} \right| + C \quad (x \neq 0; 1). \end{aligned}$$

414. 1-й способ: при $x \neq -3; -2$ имеем

$$\int \frac{3(x+2) - 2(x+3)}{(x+2)(x+3)} dx = \int \left(\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2} \right) dx = 3 \ln |x+3| - 2 \ln |x+2| + C.$$

2-й способ:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+2) - 2}{(x+2)(x+3)} dx &= \int \frac{dx}{x+3} - 2 \int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} = \\ &= \ln |x+3| - 2 \int \frac{dx}{(x + \frac{5}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \ln |x+3| - 2 \int \frac{d(x + \frac{5}{2})}{(x + \frac{5}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \\ &= \ln |x+3| - 2 \ln \left| \frac{(x + \frac{5}{2}) - \frac{1}{2}}{(x + \frac{5}{2}) + \frac{1}{2}} \right| + C = \\ &= \ln |x+3| - \ln \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^2 + C = \ln \frac{|x+3|^3}{(x+2)^2} + C. \end{aligned}$$

415. 1-й способ:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx &= \int \frac{\sin x \cos x}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} dx = \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{d(\cos 2x)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(\cos 2x)}{1 + \cos^2 2x} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\cos 2x) + C. \end{aligned}$$

2-й способ: при $\cos x \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sin x \cos x) / \cos^2 x}{(\sin^4 x + \cos^4 x) / \cos^2 x} dx &= \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{(\operatorname{tg}^4 x + 1) \cos^2 x} = \\ &= \int \frac{\operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^4 x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^4 x + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C. \end{aligned}$$

416. Имеем при $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} &= \int \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^{-2}+1}} = - \int \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{d(\frac{1}{x})}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}} = \\ &= - \int \frac{d(\frac{1}{|x|})}{\sqrt{1+(\frac{1}{|x|})^2}} = - \ln \left| \frac{1}{|x|} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right| + C = - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

417. Имеем при $0 < x < 1$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

418. 1-й способ. Сделаем подстановку $t = e^x$, тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2)}{t^2\sqrt{1+t^2}} =$$

(замена $z = 1 + t^2$, затем замена $p = \sqrt{1+z}$, $z = p^2 - 1$, $dz = 2pdp$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z\sqrt{1+z}} = \frac{1}{2} \int \frac{2pdp}{(p^2-1)p} = \int \frac{dp}{p^2-1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{p-1}{p+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + C. \end{aligned}$$

2-й способ. Сделаем подстановку $t = e^{-x}$, тогда $x = -\ln t$, $dx = -\frac{dt}{t}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} &= \int \frac{-dt}{t\sqrt{1+t^{-2}}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln \left| t + \sqrt{t^2+1} \right| + C = \\ &= -\ln \left| e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1} \right| + C = x - \ln(1 + \sqrt{1+e^{2x}}) + C. \end{aligned}$$

419. Сделаем замену $t = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $dt = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$:

$$\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx = \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot (\ln(x + \sqrt{1+x^2}))^{\frac{3}{2}} + C.$$

420. Разделим числитель и знаменатель на 4^x :

$$\begin{aligned} \int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx &= \int \frac{(\frac{3}{2})^x dx}{(\frac{3}{2})^{2x} - 1} = \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} \int \frac{d((\frac{3}{2})^x)}{((\frac{3}{2})^x)^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{2 \ln \frac{3}{2}} \cdot \ln \left| \frac{(\frac{3}{2})^x - 1}{(\frac{3}{2})^x + 1} \right| + C = \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \cdot \ln \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right| + C \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

421. Преобразуем подынтегральное выражение

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}} &= \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2} + (1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)(1+\sqrt{1+x^2})}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2})$, поэтому приходим к интегралу

$$\int \frac{d(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

422. Сделаем тригонометрическую подстановку $x = \sin t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (можно подстановку $x = \cos t$, где $t \in [0, \pi]$):

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int |\cos t| \cdot \cos t dt =$$

(так как $\cos t \geq 0$ при $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$$\begin{aligned} &= \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin x + \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin x) \right) + C = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

423. Найдём ОДЗ: $\frac{a+x}{a-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-a, a)$. Сделаем подстановку $x = a \sin t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Тогда $dx = a \cos t dt$, $t = \arcsin \frac{x}{a}$ и приходим к интегралу

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= \int \sqrt{\frac{a+a \sin t}{a-a \sin t}} d(a \sin t) = a \int \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} \cos t dt = \\ &= a \int \frac{1+\sin t}{\sqrt{1-\sin t} \cdot \sqrt{1+\sin t}} \cos t dt = a \int \frac{1+\sin t}{|\cos t|} \cos t dt = \end{aligned}$$

(так как $\cos t \geq 0$ при $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$$= a \int (1 + \sin t) dt = a(t - \cos t) + C = a \left(\arcsin \frac{x}{a} - \cos \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \right) + C =$$

$$= a \cdot \arcsin \frac{x}{a} - a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} + C = a \cdot \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

424. Имеем

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = a \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \\ &= a \cdot \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \int \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = a \cdot \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C. \end{aligned}$$

425. Имеем: $\frac{1}{b} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{a}{b}}.$

1) Если $ab > 0$, то $\frac{1}{b} \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{\frac{a}{b}})^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b}x}{\sqrt{a}} + C;$

2) Если $ab < 0$, то

$$\frac{1}{b} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\sqrt{\frac{|a|}{|b|}}\right)^2} = \frac{\sqrt{|b|}}{2b\sqrt{|a|}} \cdot \ln \left| \frac{x - \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}}{x + \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}} \right| + C = \frac{\operatorname{sgn} b}{2\sqrt{|ab|}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{|b|x} - \sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|x} + \sqrt{|a|}} \right| + C.$$

426. Положим $t = x^x$, тогда $dt = x^x(1 + \ln x)dx$ и при $x > 0$ имеем:

$$\int x^x(1 + \ln x)dx = \int dt = t + C = x^x + C.$$

427. Возьмём $u = x^2$, $dv = \sin x dx$, тогда $du = 2x dx$, $v = -\cos x$, проинтегрируем:

$$\int x^2 \sin x dx = x^2 \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) 2x dx.$$

Интеграл упростился, проинтегрируем по частям ещё раз, выбирая аналогично $u = x$, $dv = \cos x dx$. Тогда $du = dx$, $v = \sin x$, и в результате имеем:

$$\begin{aligned} -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx &= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) = \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C. \end{aligned}$$

428. 1-й способ. Интеграл выглядит как интеграл, берущийся по частям. Попробуем применить этот метод. Положим $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x}$, откуда находим $du = \frac{dx}{x}$, $v = \ln x$. Подставляя, получаем при $x > 0$

$$I = \int \frac{\ln x dx}{x} = \ln^2 x - \int \frac{\ln x dx}{x} = \ln^2 x - I,$$

откуда находим $I = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$

2-й способ. Внося $\frac{1}{x}$ под знак дифференциала, находим

$$\int \frac{\ln x dx}{x} = \int \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

429. Положим $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$, тогда $x = e^u \Rightarrow dx = e^t dt$, $v = -\frac{1}{x}$ и, интегрируя по частям, получаем при $x > 0$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x \, dx}{x^2} &= -\frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{dx}{x}\right) = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C.\end{aligned}$$

430. Проинтегрируем по частям при $x > 0$, положив $u = \ln^2 x$, $v' = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x \, dx &= \ln^2 x \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln^2 x - \frac{4}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x \, dx =\end{aligned}$$

(проинтегрируем второй раз по частям, положив $u = \ln x$, $v' = \sqrt{x}$)

$$\begin{aligned}&= \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln^2 x - \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \int \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln^2 x - \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x + \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right) + C \quad (x > 0).\end{aligned}$$

431. Положим $u = \ln x$, $dv = (x^3 - 3x^2 + 1)dx$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^4}{4} - x^3 + x$ и, интегрируя по частям при $x > 0$, приходим к интегралу

$$\begin{aligned}\int (x^3 - 3x^2 + 1) \ln x \, dx &= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x \right) \ln x - \int \frac{\frac{x^4}{4} - x^3 + x}{x} dx = \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x \right) \ln x - \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{3} - x + C.\end{aligned}$$

432. Положим $u = \operatorname{arctg} 2x$, $dv = dx$, тогда $du = \frac{2dx}{1+4x^2}$, $v = x$. Интегрируя по частям, приходим к интегралу

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} 2x \, dx &= x \operatorname{arctg} 2x - 2 \int \frac{x \, dx}{1+4x^2} = \\ &= x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \int \frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2} = x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C.\end{aligned}$$

433. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = xdx$. Тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{x^2}{2}$. Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2 \operatorname{arctg} x - \int \frac{(1+x^2) - 1}{1+x^2} dx \right) = \frac{1}{2} \left(x^2 \operatorname{arctg} x - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + C. \end{aligned}$$

434. Положим $u = \arccos x$, $dv = x^2 dx$. Тогда $du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \frac{1}{3}x^3$. Интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \arccos x dx &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x - \int \frac{1}{3}x^3 \left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x - \frac{1}{3} \int x^2 \cdot d(\sqrt{1-x^2}) = \end{aligned}$$

(образовавшийся в правой части интеграл ещё раз проинтегрируем по частям, положив на этот раз $u = x^2$, $v = \sqrt{1-x^2}$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x - \frac{1}{3} \left(x^2 \sqrt{1-x^2} - \int 2x \sqrt{1-x^2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x - \frac{1}{3} \left(x^2 \sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) \right) = \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x - \frac{1}{3}x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9} \sqrt{(1-x^2)^3} + C, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

435. Положим $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ($0 < t \leq 1$), тогда $x = \frac{1}{t^2}$ и $dx = -\frac{2dt}{t^3}$. Получаем интеграл $-2 \int \frac{\arcsin t}{t^3} dt$. Интегрируя по частям, приняв $u = \arcsin t$, $du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $dv = \frac{dt}{t^3}$, $v = -\frac{1}{2t^2}$, имеем

$$\begin{aligned} -2 \int \frac{\arcsin t}{t^3} dt &= \frac{\arcsin t}{t^2} - \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{1-t^2}} = \frac{\arcsin t}{t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} = \\ &= \frac{\arcsin t}{t^2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1} + C. \end{aligned}$$

Таким образом, $\int \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = x \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-1} + C$.

436. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = \frac{dx}{x^3}$. Тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = -\frac{1}{2x^2}$ и, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} dx &= \operatorname{arctg} x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{((1+x^2) - x^2)dx}{x^2(1+x^2)} = \\ &= -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x \right) + C. \end{aligned}$$

437. Положим $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$, откуда $du = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $v = x$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

Выражая из полученного равенства искомый интеграл, находим окончательно:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (|x| < a).$$

438. Дважды проинтегрируем по частям. Положим $u = x^2 + x$, $dv = e^{-x} dx$, тогда $du = (2x + 1)dx$, $v = -e^{-x}$ и получаем:

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2 + x)e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + x) - \int (2x + 1)(-e^{-x}) dx = \\ &= -e^{-x}(x^2 + x) + \int (2x + 1)e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Положим $u = 2x + 1$, $dv = e^{-x} dx$, тогда $du = 2dx$, $v = -e^{-x}$ и, второй раз интегрируя по частям, приходим к интегралу

$$\begin{aligned} I &= -e^{-x}(x^2 + x) - e^{-x}(2x + 1) + 2 \int e^{-x} dx = \\ &= -e^{-x}(x^2 + x) - e^{-x}(2x + 1) - 2e^{-x} + C = e^{-x}(x^2 + 3x + 3) + C. \end{aligned}$$

439. Положим $t = -\sqrt[3]{x+1}$, тогда $x = -1 - t^3$, $dx = -3t^2 dt$ и $\int e^{-\sqrt[3]{x+1}} dx = -3 \int e^{tt^2} dt$. Интегрируя по частям, получаем

$$-3 \left(e^{tt^2} - 2 \int te^t dt \right) = -3(e^{tt^2} - 2te^t + 2e^t) + C, \text{ где } t = -\sqrt[3]{x+1}.$$

440. Полагая $u = x$, $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$ и, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sin^2 x} dx &= -x \operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x dx = -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \\ &= -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x| + C \quad (x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

441. Проинтегрируем по частям, положив $u = x$, $dv = \operatorname{tg}^4 x dx$. Поскольку в данном случае вид функции $v(x)$ не очевиден, то, чтобы найти её, вычислим отдельно интеграл

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^4 x dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^2 x dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C_1. \end{aligned}$$

Возьмём в качестве $v(x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x$ и продолжим интегрирование:

$$\begin{aligned} \int (x \cdot \operatorname{tg}^4 x) dx &= x \left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x \right) - \int \left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x \right) dx = \\ &= x \left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x \right) - \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \operatorname{tg} x dx - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \frac{x^2}{2} = \\ &= x \left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x \right) - \frac{1}{3} \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \frac{1}{3} \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \frac{x^2}{2} = \\ &= x \left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x \right) - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{6} - \frac{4}{3} \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + C, \quad \text{где } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

442. Рассмотрим оригинальный способ, который применяется, если надо вычислить сразу оба интеграла $I_1 = \int \sin(\ln x) dx$ и $I_2 = \int \cos(\ln x) dx$. Проинтегрируем каждый из интегралов по частям один раз:

$$I_1 = x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \cdot \sin(\ln x) - I_2,$$

$$I_2 = x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = x \cdot \cos(\ln x) + I_1,$$

откуда сложением и вычитанием этих равенств сразу находим

$$I_1 = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C,$$

$$I_2 = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C \quad (x > 0).$$

Способ отдельного вычисления этих интегралов рассмотрен в решении следующей задачи.

443. Положим $t = \ln x$ (при $x > 0$), тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$, и интеграл принимает вид $\int e^t \cos t dt$. Проинтегрируем его дважды по частям:

$$\begin{aligned} I &= \int e^t \cos t dt = e^t \sin t - \int e^t \sin t dt = \\ &= e^t \sin t + \left(e^t \cos t - \int e^t \cos t dt \right) = e^t(\sin t + \cos t) - I. \end{aligned}$$

Выражая из полученного равенства I и приписывая константу C , окончательно находим:

$$I = \frac{e^t}{2}(\sin t + \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C, \quad x > 0.$$

Можно было вычислить этот интеграл и не прибегая к предварительной замене переменной, а сразу непосредственно интегрируя по частям. Так, положим $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx$, тогда

$$\begin{aligned} I &= \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) - \int x \left(-\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx. \end{aligned}$$

Ещё раз проинтегрируем получившийся интеграл по частям:

$$I = x \cos(\ln x) + \left(x \sin(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \right) = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) - I,$$

откуда находим $I = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$.

444. Рассмотрим оригинальный способ, который применяется, если надо вычислить сразу оба интеграла $I_1 = \int e^{ax} \cos(bx) dx$ и $I_2 = \int e^{ax} \sin(bx) dx$. Проинтегрируем каждый из интегралов по частям один раз:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \cos bxd(e^{ax}) = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \cdot I_2,$$

$$I_2 = \frac{1}{a} \int \sin bxd(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{a}e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \cdot I_1,$$

откуда

$$I_1 = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C, \quad I_2 = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

445. Интегралы вида $\int e^{ax} \sin bxdx$, $\int e^{ax} \cos bxdx$ вычисляются двукратным интегрированием по частям. В результате получается уравнение относительно неизвестного интеграла. В данном случае положим $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}dx$. Тогда $du = b \cos bxdx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$ и имеем:

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{1}{a}e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bxdx.$$

Ещё раз проинтегрируем по частям образовавшийся интеграл, положив в нем, аналогично предыдущему, в качестве u тригонометрическую функцию, а в качестве v – показательную: $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}dx$. Тогда $du = -b \sin bxdx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$ и придём к результату:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bxdx &= \frac{1}{a}e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a}e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx \right) = \\ &= \frac{1}{a}e^{ax} \left(\sin bx - \frac{b}{a} \cos bx \right) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bxdx. \end{aligned}$$

Обозначим исходный интеграл через I . Имеем уравнение относительно I :

$$I = \frac{1}{a}e^{ax} \left(\sin bx - \frac{b}{a} \cos bx \right) - \frac{b^2}{a^2}I,$$

откуда выражаем $I = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)$. Окончательно,
 $\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx) + C.$

446. Полагая $u = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $dv = \frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2}}$, $v = \sqrt{1 + x^2}$, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{x \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx &= \int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) d(\sqrt{1 + x^2}) = \\ &= \sqrt{1 + x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int dx = \sqrt{1 + x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - x + C. \end{aligned}$$

447. Положим $t = \sqrt{x^2 + 1}$ и проинтегрируем по частям:

$$\int x\sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln(\sqrt{x^2 + 1}) dx = \frac{1}{2} \int t^2 \ln(t^2 - 2) dt = \frac{1}{2} \int \ln(t^2 - 2) d\left(\frac{t^3}{3}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}t^3 \ln(t^2-2) - \frac{1}{3} \int \frac{t^4 dt}{t^2-2} = \frac{1}{6}t^3 \ln(t^2-2) - \frac{1}{3} \left(\frac{t^3}{3} + 2t + \sqrt{2} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| \right) + C = \\
&= \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} \ln \sqrt{x^2-1} - \frac{x^2+7}{9} \sqrt{x^2+1} - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} + C \quad (|x| > 1).
\end{aligned}$$

448. Так как $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, то разложим вначале по формуле Маклорена не саму исходную функцию, а её производную (что может оказаться проще):

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

Тогда, проинтегрировав это равенство в окрестности нуля, получаем

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) + C, \quad x \rightarrow 0.$$

Подставим в полученное разложение $x = 0$: $\operatorname{arctg} 0 = C$, откуда $C = 0$. В частности, из этой формулы при $n = 2$ получим:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6), \quad x \rightarrow 0.$$

9 СЕМИНАР: Интегрирование рациональных функций

«Законы природы — это просто математические выкладки Бога».

Евклид (III век до н. э) — древнегреческий математик, геометр, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике.

Остановимся подробнее на некоторых из наиболее изученных классов интегрируемых функций и существующих методах их интегрирования. На данном семинаре речь пойдет об интегрировании алгебраических рациональных функций, т. е. интегралах вида

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx,$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — алгебраические многочлены заданных степеней. Вначале рассмотрим на примерах некоторые из наиболее часто встречающихся типов интегралов от рациональных функций, и уже затем — общий подход к интегрированию таких дробей.

9.1 Простейшие классы интегралов

1. *Интегрирование многочленов.* Интеграл выписывается сразу как сумма первообразных от каждого члена плюс константа:

Пример 110. Имеем

$$\int \left(5x^6 + 2x^4 - x^2 + 3x - \frac{1}{4} \right) dx = \frac{5}{7}x^7 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + C. \square$$

2. *Интегралы вида* $\int \frac{ax+b}{cx+\delta} dx$ *(* $ac \neq 0$ *,* $cx+\delta \neq 0$ *).*

Интеграл от дробно-линейной функции легко сводится к сумме двух табличных интегралов выделением в подынтегральной дроби рациональной части:

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{cx+\delta} dx &= \int \frac{\frac{a}{c}(cx+\delta) + b - \frac{a\delta}{c}}{cx+\delta} dx = \frac{a}{c}x + \left(b - \frac{a\delta}{c} \right) \int \frac{dx}{cx+\delta} = \\ &= \frac{a}{c}x + \frac{bc - a\delta}{c^2} \int \frac{dx}{x + \frac{\delta}{c}} = \frac{a}{c}x + \frac{bc - a\delta}{c^2} \cdot \ln \left| x + \frac{\delta}{c} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 111. Вычислить $\int \frac{2x+1}{3x-2} dx$.

Решение. При $x \neq \frac{2}{3}$ имеем:

$$\int \frac{\frac{2}{3}(3x-2) + \frac{7}{3}}{3x-2} dx = \frac{2}{3} \int dx + \frac{7}{9} \int \frac{d(3x-2)}{3x-2} = \frac{2}{3}x + \frac{7}{9} \ln |3x-2| + C. \square$$

3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ ($a \neq 0$).

Выделением полного квадрата в квадратном трёхчлене интегралы данного вида приводятся к одному из двух типов табличных интегралов:

$$\int \frac{dt}{t^2 + A^2} = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{t}{A} + C \quad \text{или} \quad \int \frac{dt}{t^2 - A^2} = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{t-A}{t+A} \right| + C$$

(первый случай реализуется, когда выражение в знаменателе не имеет действительных корней, второй – когда знаменатель имеет два различных корня).

Пример 112. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$.

Решение. Выделяя в знаменателе полный квадрат, получаем

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2 + 9} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 9} = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C. \square$$

Пример 113. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 - 6x - 16}$.

Решение. Выделяя в знаменателе полный квадрат, получаем

$$\int \frac{dx}{(x-3)^2 - 25} = \frac{1}{10} \cdot \ln \left| \frac{(x-3)-5}{(x-3)+5} \right| + C = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-8}{x+2} \right| + C \quad (x \neq -2; 8). \square$$

Наряду с рассмотренным способом, для вычисления интегралов вида $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ ($a \neq b$) можно воспользоваться тождеством:

$$a - b = (x+a) - (x+b).$$

Пример 114. Вычислить $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ ($a \neq b$).

Решение. Умножим и разделим на $a-b$ и сформируем в числителе выражения $(x+a)$ и $(x+b)$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} &= \frac{1}{a-b} \int \frac{(x+a) - (x+b)}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{a-b} \left(\int \frac{dx}{x+b} - \int \frac{dx}{x+a} \right) = \\ &= \frac{1}{a-b} (\ln |x+b| - \ln |x+a|) + C = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C \quad (x \neq -a; -b). \square \end{aligned}$$

К этой же группе относится интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0, x \neq \pm a).$$

4. *Интегралы вида* $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} \quad (a \neq b).$

Интегралы указанного вида можно вычислять при помощи тождества

$$1 \equiv \left(\frac{(x+a) - (x+b)}{a-b} \right)^2.$$

Пример 115. Вычислить $I = \int \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2}.$

Решение. Имеем при $x \neq -2; 3$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{25} \int \frac{((x+2) - (x-3))^2}{(x+2)^2(x-3)^2} dx = \frac{1}{25} \int \left(\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{25} \int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{25} \int \frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{2}{25} \int \frac{dx}{(x-3)(x+2)} = \\ &= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125} \ln|x-3| + \frac{2}{125} \ln|x+2| + C. \quad \square \end{aligned}$$

Интегралы более общего вида

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n} \quad (a \neq b, m, n \in \mathbb{N})$$

подстановкой $t = \frac{x+a}{x+b}$ сводятся к интегралу

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n} = \frac{1}{(b-a)^{n+m-1}} \int \frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m} dt$$

(вывод см. в [22]).

5. *Интегралы вида* $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx \quad (a \neq 0).$

Эти интегралы вычисляются выделением в числителе дроби выражения, равного производной $2ax + b$ знаменателя дроби и последующим разбиением на два интеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + (B - \frac{Ab}{2a})}{ax^2 + bx + c} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \end{aligned}$$

где интеграл $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ уже рассматривался выше.

Пример 116. Вычислить $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx$.

Решение. Так как $(x^2 + 2x + 5)' = 2(x + 1)$, имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx &= \int \frac{(x+1)+1}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+5} + \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 117. Вычислить $\int \frac{x+2}{x^2+2x-3} dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2+2x-3} dx &= \int \frac{(x+1)+1}{x^2+2x-3} dx = \int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x-3} + \int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x-3)}{x^2+2x-3} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2-2^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x-3| + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C. \quad \square \end{aligned}$$

6. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$ ($a \neq 0$).

Один из методов вычисления этого вида интегралов приведён ниже:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2} dx = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{a^2+x^2} - \frac{1}{a^2} \int x \cdot \frac{xdx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \int x d\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right) = \\ &= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \left(x \cdot \frac{1}{x^2+a^2} - \int \frac{dx}{x^2+a^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{x^2 + a^2} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) + C = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + C.$$

7. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$ ($a \neq 0$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$).

Данные интегралы можно вычислить тригонометрической подстановкой $x = a \operatorname{tg} t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Пример 118. Вычислить $\int \frac{dx}{(2 + x^2)^2}$.

Решение. Положим $x = \sqrt{2} \operatorname{tg} t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тогда $dx = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t} dt$, $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$ и получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2 + x^2)^2} &= \int \frac{\sqrt{2} dt}{\cos^2 t \cdot (2 + 2 \operatorname{tg}^2 t)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{dt}{\cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^4 t}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{8} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right) + C. \end{aligned}$$

Можно преобразовать ответ далее, воспользовавшись формулой

$$\sin(2 \operatorname{arctg} x) = 2 \sin(\operatorname{arctg} x) \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Ниже этот же интеграл будет вычислен методом М.В. Остроградского. $\square$

8. Интегралы вида

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^2} dx \quad (D = b^2 - 4ac < 0; a \neq 0).$$

Для вычисления этого вида интегралов надо представить линейную функцию в числителе в виде комбинации производной квадратного трёхчлена и некоторой константы и затем разбить интеграл на два интеграла.

Пример 119. Вычислить $\int \frac{3x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx$.

Решение. Так как $(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$, то имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x + 1) - \frac{1}{2}}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^2} = \\ &= -\frac{3}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2x + 1}{6(x^2 + x + 1)} - \frac{1}{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C. \square \end{aligned}$$

9. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n} \quad (D = b^2 - 4c < 0; n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Выделением полного квадрата $x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$ и заменой $z = x + \frac{b}{2}$ интеграл приводится к виду

$$I_n = \int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^n}.$$

Для вычисления последнего интеграла используется подстановка $z = a \operatorname{tg} u$ или выводится рекуррентное соотношение, позволяющее понизить степень n в знаменателе интегрированием по частям (см. [22, п. 3.6]).

Вычисление интегралов более общего вида

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx \quad (D = b^2 - 4ac < 0; a \neq 0)$$

рассмотрено в [22, п. 3.7].

10. Метод алгебраических преобразований (разные приёмы) Так как основной подход, основанный на разложении рациональной дроби на простейшие дроби (который будет изложен ниже), часто требует громоздких выкладок, то при вычислении интегралов от рациональных функций при любой возможности полезно использовать альтернативные подходы в виде различных упрощающих алгебраических преобразований, вспомогательных замен переменных – всего того, что так или иначе упрощает вычисление интегралов.

Пример 120. Вычислить $\int x(1 - 2x)^{37} dx$.

Решение. Преобразуем интеграл к виду:

$$\begin{aligned} \int \left(-\frac{1}{2}(1 - 2x) + \frac{1}{2}\right) (1 - 2x)^{37} dx &= -\frac{1}{2} \int (1 - 2x)^{38} dx + \frac{1}{2} \int (1 - 2x)^{37} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2x)^{38} d(1 - 2x) - \frac{1}{4} \int (1 - 2x)^{37} d(1 - 2x) = \frac{1}{156} (1 - 2x)^{39} - \frac{1}{152} (1 - 2x)^{38} + C. \end{aligned}$$

Можно было сделать подстановку $t = 1 - 2x$. $\square$

Пример 121. [7, № 1767] Вычислить $\int x^3(1 - 5x^2)^{10} dx$.

Решение. Сделаем замену $t = 1 - 5x^2$, откуда $x^2 = \frac{1-t}{5}$, $x dx = -\frac{1}{10} dt$, и в результате приходим к интегралу:

$$\int \left(\frac{1-t}{5}\right) t^{10} \left(-\frac{dt}{10}\right) = \frac{1}{50} \int t^{11} dt - \frac{1}{50} \int t^{10} dt = \frac{t^{12}}{600} - \frac{t^{11}}{550} + C =$$

$$= \frac{(1-5x^2)^{12}}{600} - \frac{(1-5x^2)^{11}}{550} + C. \square$$

Пример 122. Вычислить $\int \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 5}$.

Решение. Выделяя полный квадрат, получим $x^4 + 2x^2 + 5 = (x^2 + 1)^2 + 4$. Выполним подстановку $t = x^2 + 1$, тогда $x dx = \frac{dt}{2}$. Переходя к новой переменной интегрирования, получим

$$\int \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{2} + C. \square$$

Пример 123. Вычислить $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$.

Решение. При $x \neq 0$ поделим числитель и знаменатель на x^2 :

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \int \frac{(1 + \frac{1}{x^2}) dx}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + C$$

(в точке $x = 0$ первообразные доопределяются предельными значениями). $\square$

Пример 124. Вычислить $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx &= \int \frac{(1+x^2) + 2x}{1+x^2} dx = \int dx + \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \\ &= x + \int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = x + \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x + \ln(1+x^2) + C. \square \end{aligned}$$

11. Интегралы от рациональных функций часто возникают при интегрировании *трансцендентных функций* при использовании *рационализирующих подстановок*.

Пример 125. Вычислить $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

Решение. Последовательно преобразуем подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \cos^4 x} dx &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \left| t = \operatorname{tg} x \right| \int t^2 (1 + t^2) dt = \int (t^4 + t^2) dt = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C, \quad \cos x \neq 0. \square \end{aligned}$$

Эти и другие приёмы осваиваются на практике при вычислении различных видов интегралов (см., в том числе, задачи к данному семинару).

9.2 Представление рациональной дроби в виде суммы простейших дробей с использованием метода неопределённых коэффициентов

«Хорошая книга подобна айсбергу, семь восьмых которого скрыто под водой».

Эрнест Хемингуэй (1899–1961), американский писатель, военный корреспондент, лауреат Нобелевской премии по литературе 1954 года.

Идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения их на простейшие дроби принадлежит Г. Лейбницу (1702–1703). Рассмотрим общий подход к интегрированию рациональных дробей, т. е. функций вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ – целые алгебраические многочлены от x . Этот подход обычно применяют в случае, когда нет более простых приёмов, позволяющих вычислить интеграл.

1. Интегрирование неправильной дроби. Если степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$, (иными словами, дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – неправильная), то делением многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ вначале выделяют целую часть – многочлен $S(x)$, т. е. представляют дробь в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, где степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Таким образом, интегрирование дробно-рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в общем случае сводится к интегрированию многочлена $S(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$.

2. Интегрирование правильной дроби. Рассмотрим интегрирование правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, в которой степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Оно основано на представлении этой дроби конечной суммой простейших дробей.

1) Первое, что необходимо сделать, – это выписать разложение дроби в сумму элементарных дробей. Вид этого разложения зависит от разложения знаменателя $Q(x)$ на множители. Известно, что алгебраический многочлен любой степени раскладывается на сомножители линейного $(x - a)$ и (или) квадратичного вида $x^2 + bx + c$. Предположим, в разложении $Q(x)$ на множители присутствует сомножитель линейного вида в n -й степени: $(x - a)^n$ (a – действительный корень многочлена кратности n). Тогда ему будет соответство-

вать сумма ровно n простейших дробей:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}, \quad (1)$$

где A_k ($k = \overline{1, n}$) – некоторые постоянные. Если сомножителей линейного типа в разложении многочлена $Q(x)$ несколько, то каждому из них соответствует аналогичная сумма. Каждому сомножителю квадратичного вида в m -й степени $(x^2 + bx + c)^m$, где трёхчлен $x^2 + bx + c$ не имеет действительных корней, соответствуют, в свою очередь, m простейших дробей:

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + bx + c} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \frac{M_3x + N_3}{(x^2 + bx + c)^3} + \dots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + bx + c)^m}, \quad (2)$$

где M_i, N_i ($i = \overline{1, m}$) – постоянные.

Таким образом, выписывается представление дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в виде конечной суммы элементарных дробей вида (1) и (2):

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \dots \\ & + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + bx + c} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \frac{M_3x + N_3}{(x^2 + bx + c)^3} + \dots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + bx + c)^m}. \end{aligned} \quad (3)$$

2) Далее методом неопределённых коэффициентов находятся постоянные A_k, M_i, N_i . Для этого все простейшие дроби в правой части равенства (3) приводятся к общему знаменателю (этим знаменателем будет многочлен $Q(x)$, как и в левой части). При этом в числителе полученной в результате дроби окажется некоторый многочлен $T(x)$, у которого коэффициенты при различных степенях x зависят от неизвестных A_k, M_i, N_i . Поскольку две рациональные дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ и $\frac{T(x)}{Q(x)}$ с одинаковыми знаменателями тождественно равны (т. е. равны сразу при всех допустимых значениях x) тогда и только тогда, когда равны их числители, то осталось записать условие тождественного равенства многочленов $P(x)$ и $T(x)$. В свою очередь, два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их степени и коэффициенты при одинаковых степенях x . Приравнивая эти коэффициенты, составляют систему алгебраических уравнений, в которой количество неизвестных (неопределённых коэффициентов) совпадает с количеством уравнений системы. Затем эта система решается (достаточно подобрать одно какое-либо решение) и, таким образом, неопределённые ранее коэффициенты оказываются найденными.

3) После этого найденные значения коэффициентов A_k, M_i, N_i подставляются в разложение (3), и интегрирование рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ оказывается в результате сведено к интегрированию суммы элементарных дробей (3). В

итоге интеграл от любой рациональной функции выражается в конечном виде с помощью некоторой рациональной функции, логарифма или арктангенса.

Рассмотрим применение данного метода на примерах.

Пример 126. Представить в виде суммы простейших дробей с неопределёнными коэффициентами (в общем виде) рациональную функцию

$$\text{а) } \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}; \quad \text{б) } \frac{3x^2-1}{x^4(x^2-x+5)^3}.$$

Решение. а) Согласно рекомендациям выше, искомое представление «правильной» дроби имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \\ & = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+3)} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3}. \end{aligned}$$

б) Имеем

$$\frac{3x^2-1}{x^4(x^2-x+5)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{Ex+F}{x^2-x+5} + \frac{Kx+L}{(x^2-x+5)^2} + \frac{Mx+N}{(x^2-x+5)^3}. \quad \square$$

Пример 127. Вычислить $\int \frac{x dx}{(x+1)(x-2)^2}$.

Решение. Разложение подынтегральной функции в сумму простейших дробей ищем в виде

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}. \quad (1)$$

Приводя дроби в правой части (1) к общему знаменателю, имеем

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Приравнивая числители дробей, получаем тождество

$$x = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1). \quad (2)$$

Приведём многочлен в правой части к стандартному виду, упорядочив степени x в порядке убывания:

$$x = (A+B)x^2 + (C-B-4A)x + (4A-2B+C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x у многочленов в левой и правой частях равенства, получаем систему трёх уравнений с тремя неизвестными A, B, C :

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C-B-4A=1, \\ 4A-2B+C=0, \end{cases}$$

решая которую находим неопределённые коэффициенты $A = -\frac{1}{9}$, $B = \frac{1}{9}$, $C = \frac{2}{3}$. Наконец, подставим найденные коэффициенты в разложение (1) и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x+1)(x-2)^2} &= -\frac{1}{9} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(x-2)^2} = \\ &= \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| - \frac{2}{3(x-2)} + C \quad (x \neq -1; 2). \end{aligned}$$

Замечание. С другой стороны, бывает удобно в равенство $P(x) = T(x)$ подставлять вместо x некоторые специально подобранные числа, чаще всего – действительные корни знаменателя $Q(x)$. В результате получаются линейные уравнения относительно искомых коэффициентов, хотя следует помнить, что при подстановке произвольных чисел полученные уравнения могут оказаться зависимыми.

Применим данный приём к предыдущему примеру. Для этого, не приводя многочлен в правой части этого тождества (2) к стандартному виду, положим в нём последовательно вначале $x = 2$ и получим $2 = 3C$, откуда $C = \frac{2}{3}$. Затем положим $x = -1$, получив, что $-1 = 9A$, откуда $A = -\frac{1}{9}$. Наконец, положим в (2) $x = 0$ (не корень многочлена $Q(x)$, но тоже достаточно удобное для подстановки число). В результате имеем $0 = 4A - 2B + C$, откуда с учётом найденных ранее A и C находим $B = \frac{1}{9}$. И далее интегрируем по описанной выше схеме. $\square$

9.3 Метод М. В. Остроградского

*В старые годы в офицерских классах Морского корпуса математику читал академик М. В. Остроградский. Он говорил своим слушателям:
«Математику на 12 баллов знает один господь Бог,
я её знаю на 10 баллов, а вы все — на нуль».
(Из мемуаров академика А.Н. Крылова)*

Ещё один метод, используемый при интегрировании правильной несократимой рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, носит название метода Остроградского. Суть этого метода состоит в выделении рациональной части первообразной.¹

Пусть многочлен $Q(x)$, расположенный в знаменателе интегрируемой дроби, имеет кратные корни, включая и комплексные (чем выше кратность корней, тем эффективнее, вообще говоря, оказывается данный метод в сравнении с методом неопределённых коэффициентов). Разложим этот многочлен $Q(x)$ на

¹*Остроградский Михаил Васильевич* (1801–1861) – русский математик и механик, член Петербургской АН, один из основателей Петербургской математической школы. Основные труды относятся к математическому анализу, теоретической механике, математической физике. Автор метода Остроградского в теории интегралов.

произведение линейных и квадратичных сомножителей. Составим многочлен $Q_2(x)$ так, чтобы каждый корень многочлена $Q(x)$ являлся бы корнем многочлена $Q_2(x)$, но входил бы в этот многочлен с кратностью 1. Других корней у многочлена $Q_2(x)$, отличных от корней многочлена $Q(x)$, нет. Определим теперь многочлен $Q_1(x)$ так, чтобы $Q_1(x) \cdot Q_2(x) = Q(x)$. То есть каждый корень многочлена $Q(x)$, если первоначально он имел кратность n ($n \in \mathbb{N}$), войдёт с кратностью, равной 1, в многочлен $Q_2(x)$, и с оставшейся после этого кратностью $(n - 1)$ в многочлен $Q_1(x)$. В частности, все простые (кратности 1) корни многочлена $Q(x)$ будут корнями $Q_2(x)$ и не будут корнями $Q_1(x)$. Далее, введём в рассмотрение ещё два многочлена $P_1(x)$ и $P_2(x)$, записав их в общем виде с неопределёнными коэффициентами, причём их степени на единицу меньше соответственно степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Тогда справедлива формула Остроградского

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx. \quad (1)$$

Чтобы с её помощью вычислить интеграл в левой части, необходимо вначале продифференцировать по x это равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \quad (2)$$

и затем, приведя дроби в правой части равенства к общему знаменателю, найти неопределённые коэффициенты методом с аналогичным названием и закончить интегрирование по формуле (1). Обратимся к примерам.

Пример 128. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(2+x^2)^2}$.

Решение. Здесь $Q_1(x) = Q_2(x) = x^2 + 2$, тогда $P_1(x) = ax + b$, $P_2(x) = cx + e$ и формула Остроградского принимает вид

$$\int \frac{dx}{(2+x^2)^2} = \frac{ax+b}{x^2+2} + \int \frac{cx+e}{x^2+2} dx.$$

Продифференцируем это равенство по переменной x :

$$\frac{1}{(x^2+2)^2} = \frac{-ax^2-2bx+2a}{(x^2+2)^2} + \frac{cx+e}{x^2+2}.$$

Приводя дроби справа к общему знаменателю, получаем

$$\frac{1}{(x^2+2)^2} = \frac{cx^3 + (e-a)x^2 + 2(c-b)x + 2(a+e)}{(x^2+2)^2}.$$

Знаменатели у этих дробей равны, поэтому равенство выполняется при всех допустимых x тогда и только тогда, когда тождественно равны многочлены в числителях

дробей. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x у многочленов слева и справа от знака равенства, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 0 = c, \\ 0 = e - a, \\ 0 = 2(c - b), \\ 1 = 2(a + e), \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a = e = \frac{1}{4}, \\ b = c = 0. \end{cases}$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу Остроградского, получаем

$$\int \frac{dx}{(2+x^2)^2} = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \quad \square$$

Пример 129. [7, № 1891] Вычислить $\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

Решение. Под знаком интеграла видим правильную дробь, знаменатель которой $Q(x) = (x-1)^2(x+1)^3$. Находим, что $Q_2(x) = (x-1)(x+1)$ и тогда $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)} = (x-1)(x+1)^2$. Так как степень многочлена $Q_1(x)$ равна 3, то $P_1(x)$ – квадратный трёхчлен, записанный в общем виде: $P_1(x) = ax^2 + bx + c$. Аналогично, поскольку степень $Q_2(x)$ равна 2, то $P_2(x)$ – многочлен первой степени $P_2(x) = \delta x + e$. Следовательно, имеем пять неопределённых коэффициентов a, b, c, δ, e . Формула Остроградского примет вид

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x+1)^2} + \int \frac{\delta x + e}{(x-1)(x+1)} dx.$$

Продифференцировав последнее равенство по x , получим

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} &= \left(\frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x+1)^2} \right)' + \frac{\delta x + e}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{(2ax + b)(x-1)(x+1)^2 - (ax^2 + bx + c)((x+1)^2 + 2(x-1)(x+1))}{(x-1)^2(x+1)^4} + \frac{\delta x + e}{(x-1)(x+1)}. \end{aligned}$$

Сократив первую из дробей в правой части на $(x+1)$ и приведя все дроби к общему знаменателю, получим:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = \\ &= \frac{(2ax + b)(x-1)(x+1) - (ax^2 + bx + c)(3x-1) + (\delta x + e)(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3}. \end{aligned}$$

Итак, при всех $x \neq \pm 1$ должно выполняться данное тождество. Так как знаменатели дробей слева и справа равны, то должны быть тождественно равны многочлены, находящиеся в числителях:

$$x \equiv (2ax + b)(x^2 - 1) - (ax^2 + bx + c)(3x - 1) + (\delta x + e)(x^2 - 1)(x + 1).$$

Найдём коэффициенты a, b, c, δ, e методом неопределённых коэффициентов (сняв временно ограничения $x \neq \pm 1$). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$x^4 : 0 = \delta$$

$$x^3 : 0 = -a + \delta + e$$

$$x^2 : 0 = -2b + a + e - \delta$$

$$x^1 : 1 = -2a - 3c + b - e - \delta$$

$$x^0 : 0 = -b + c - e$$

Решая систему пяти уравнений с пятью неизвестными, находим

$$a = b = e = -\frac{1}{8}, \quad c = -\frac{1}{4}, \quad \delta = 0.$$

Подставим значения коэффициентов в формулу Остроградского:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}.$$

Осталось вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} &= \frac{1}{2} \int \frac{(1+x) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

Итак, окончательно имеем ($x \neq \pm 1$):

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \quad \square$$

9.4 Задачи для самостоятельного решения

Используя подходящие преобразования, свести к табличным следующие интегралы от рациональных дробей:

$$\text{№449. } \int \frac{dx}{3-5x};$$

$$\text{№450. } \int \frac{dx}{x^2+x-2};$$

$$\text{№451. } \int \frac{3x+2}{x^2+x-1} dx;$$

$$\text{№452. } \int \frac{x^2}{2x-1} dx;$$

$$\text{№453. } \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^{100}};$$

$$\text{№454. } \int \frac{dx}{x^3(x-1)^6};$$

$$\text{№455. } \int \frac{dx}{x^4-1};$$

$$\text{№456. } \int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} dx;$$

$$\text{№457. } \int \frac{dx}{x(1-x^3)^2};$$

$$\text{№458. } \int \frac{dx}{x^3(x^2-2)};$$

$$\text{№459. } \int \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2};$$

$$\text{№460. } \int \frac{x^4+1}{x^6-1} dx.$$

Раскладывая в сумму простейших дробей и используя метод неопределённых коэффициентов, вычислить интегралы:

$$\text{№461. } [7, \text{ № 1867}] \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)};$$

$$\text{№462. } [7, \text{ № 1877}] \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)};$$

$$\text{№463. } [7, \text{ № 1881}] \int \frac{dx}{x^3+1};$$

$$\text{№464. } \int \frac{3x^2-x+2}{(x^2+1)^2(x-1)} dx;$$

$$\text{№465. } \int \frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x} dx;$$

$$\text{№466. } \int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} dx.$$

Используя метод Остроградского, вычислить интегралы:

№467. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2};$

№468. [7, № 1892] $\int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2};$

№469. $\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1};$

№470. $\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1 - x)^3(1 + x^2)^2} dx;$

№471. $\int \frac{x^4 + x^3 + x + 4}{(x^3 + 1)^2} dx.$

Применяя разные приёмы, вычислить интегралы:

№472. [7, № 1870] $\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4};$

№473. [7, № 1882] $\int \frac{x dx}{x^3 - 1};$

№474. [7, № 1886] $\int \frac{dx}{x^6 + 1};$

№475. [7, № 1903] $\int \frac{x^3 dx}{(x - 1)^{100}};$

№476. [7, № 1908] $\int \frac{x^4 dx}{(x^{10} - 10)^2};$

№477. [7, № 1909] $\int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2};$

№478. [7, № 1913] $\int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)};$

№479. $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^3}.$

Указание: сделать подстановку $x = \frac{1+t}{1-t}.$

№480. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$

Указание: сделать подстановку $t = \frac{x-2}{x+3}.$

9.5 Ответы и решения

449. Имеем

$$\int \frac{dx}{3-5x} = \int \frac{-\frac{1}{5}d(-5x)}{3-5x} = -\frac{1}{5} \int \frac{d(3-5x)}{3-5x} = -\frac{1}{5} \ln|3-5x| + C.$$

450. Имеем

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x+2)-(x-1)}{3(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right),$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} \left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} \right) = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C \quad (x \neq -2; 1).$$

451. Согласно приёму вычисления данного вида интегралов, выделим в числителе производную от знаменателя $(x^2+x-1)' = 2x+1$ и после этого разобьём на два интеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x^2+x-1} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{x^2+x-1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+x-1)}{x^2+x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2+x-1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} \ln \left| \frac{(x+\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{5}}{2}}{(x+\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2+x-1| + \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x+1-\sqrt{5}}{2x+1+\sqrt{5}} \right| + C. \end{aligned}$$

452. Выделяем последовательно в числителе дроби выражение $(2x-1)$ и затем разбиваем на три интеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{2x-1} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}x(2x-1) + \frac{1}{4}(2x-1) + \frac{1}{4}}{2x-1} dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2x-1)} \right) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln|2x-1| + C. \end{aligned}$$

Можно было вычислить интеграл с помощью замены $t = 2x - 1$.

453. Выполним подстановку $t = x + 2$, в результате которой степень суммы оказывается не в знаменателе, а в числителе дроби, что удобнее для вычисления интеграла:

$$\int \frac{(t-2)^2}{t^{100}} dt = \int \frac{t^2 - 4t + 4}{t^{100}} dt = \int (t^{-98} - 4t^{-99} + 4t^{-100}) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{t^{-97}}{97} + 4 \cdot \frac{t^{-98}}{98} - 4 \cdot \frac{t^{-99}}{99} + C = \\
&= -\frac{1}{97(x+2)^{97}} + \frac{2}{49(x+2)^{98}} - \frac{4}{99(x+2)^{99}} + C, \quad x \neq -2.
\end{aligned}$$

454. Приведём интеграл к виду $\int \frac{dx}{x^9 \left(\frac{x-1}{x}\right)^6}$ и положим $t = \frac{x-1}{x}$, тогда

$$\begin{aligned}
&\int \frac{(1-t)^7}{t^6} dt = \int \frac{1-7t+21t^2-35t^3+35t^4-21t^5+7t^6-t^7}{t^6} dt = \\
&= -\frac{1}{5t^5} + \frac{7}{4t^4} - \frac{7}{t^3} + \frac{35}{2t^2} - \frac{35}{t} - 21 \ln|t| + 7t - \frac{t^2}{2} + C, \quad \text{где } t = \frac{x-1}{x} \quad (x \neq 0; 1).
\end{aligned}$$

455. Так как

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{2(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2(x^2+1)},$$

то имеем $\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C, \quad x \neq \pm 1.$

456. Выделим целую часть неправильной рациональной дроби:

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} = x+3 + \frac{3x+1}{x^2+2}.$$

Подставляя полученное представление под знак интеграла, получим

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} dx = \int (x+3) dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2} dx = \\
&= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2} \ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}$$

457. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{x(1-x^3)^2} = \int \frac{x^2 dx}{x^3(1-x^3)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{x^3(1-x^3)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u(1-u)^2} = \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1-u} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \frac{1}{3} \int \frac{du}{(1-u)^2} + \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \\
&= -\frac{1}{3(1-u)} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u}{1-u} \right| + C = \frac{1}{3(x^3-1)} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3}{1-x^3} \right| + C \quad (x \neq 0; 1).
\end{aligned}$$

458. При $x \neq 0; \pm\sqrt{2}$ имеем:

$$\int \frac{dx}{x^3(x^2-2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^4(x^2-2)} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2(u-2)} = -\frac{1}{4} \int \frac{(u-2)-u}{u^2(u-2)} du =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2} + \frac{1}{4} \int \frac{du}{u(u-2)} = \frac{1}{4u} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{u-2}{u} \right| + C = \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2-2}{x^2} \right| + C.$$

459. При $x \neq -2; 3$ имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2} &= \int \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{25} \int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{25} \int \frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{2}{25} \int \frac{dx}{(x-3)(x+2)} = \\ &= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125} \ln|x-3| + \frac{2}{125} \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

460. Разобьём интеграл на два интеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+1}{x^6-1} dx &= \int \frac{x^4+1-2x^2}{x^6-1} dx + 2 \int \frac{x^2}{x^6-1} dx = \\ &= \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx + \frac{2}{3} \int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2-1} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3-1}{x^3+1} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1} \right| + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3-1}{x^3+1} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \right| + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3-1}{x^3+1} \right| + C \quad (x \neq \pm 1). \end{aligned}$$

461. При $x \neq -1; -2; -3$ имеем:

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \right) dx.$$

Приводя дроби в правой части к общему знаменателю и приравнивая числители, приходим к тождеству

$$x \equiv (A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + (6A+3B+2C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в многочленах справа и слева, получаем

$$\begin{aligned} x^2: \quad & 0 = A + B + C, \\ x^1: \quad & 1 = 5A + 4B + 3C, \end{aligned}$$

$$x^0: \quad 0 = 6A + 3B + 2C.$$

Решая систему, находим $A = -\frac{1}{2}$, $B = 2$, $C = -\frac{3}{2}$, тогда приходим к интегралу

$$\int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+3} \right) dx = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| + C.$$

462. При $x \neq -1$ имеем:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

откуда методом неопределённых коэффициентов находим $A = C = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, поэтому

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{-x+1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + C.$$

463. Имеем при $x \neq -1$

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \right) dx.$$

Неопределённые коэффициенты находим из тождества

$$1 \equiv (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A+C,$$

получив $A = -B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$. Подставляя в интеграл, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{(x-\frac{1}{2}) - \frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \int \frac{d((x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

464. Разложение подынтегральной дроби ищем в виде

$$\frac{3x^2-x+2}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Коэффициенты A, B, C, D, E определим, исходя из тождества

$$3x^2 - x + 2 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x - 1)(x^2 + 1) + (Dx + E)(x - 1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -B + C = 0, \\ 2A - C + D + B = 3, \\ C - B + E - D = -1, \\ A - C - E = 2. \end{cases}$$

Полагая $x = 1$, находим $A = 1$. Решая систему с учётом $A = 1$, определяем остальные коэффициенты: $B = C = -1$, $D = 1$, $E = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)^2(x - 1)} dx &= \int \frac{dx}{x - 1} - \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx + \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C \quad (x \neq 1). \end{aligned}$$

465. Для начала выделим в неправильной дроби целую часть

$$I = \int \frac{4x^4 + 8x^3 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \int \left(4x - \frac{4x^2 + 3x + 3}{x(x + 1)^2} \right) dx.$$

Разложим подынтегральную дробь в сумму элементарных дробей

$$\frac{4x^2 + 3x + 3}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2},$$

и методом неопределённых коэффициентов найдём $A = 3$, $B = 1$, $C = -4$. Тогда при $x \neq -1; 0$ имеем

$$I = 2x^2 - \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x + 1} - \frac{4}{(x + 1)^2} \right) dx = 2x^2 - 3 \ln |x| - \ln |x + 1| - \frac{4}{x + 1} + C.$$

466. Выделим целую часть

$$\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx = \int \left(2x + \frac{1}{x^2(x^2 + 3)} \right) dx = x^2 + I.$$

Вычислим интеграл I : $\frac{1}{x^2(x^2 + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 3}$. Методом неопределённых коэффициентов найдём $A = C = 0$, $B = -D = \frac{1}{3}$ и затем проинтегрируем. Окончательно

$$\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx = x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

467. Выпишем формулу Остроградского для данного интеграла:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 1} dx.$$

Продифференцируем и приведём дроби к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{A(x^2 + 1) - (Ax + B) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1},$$

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Cx^3 + (-A + D)x^2 + (-2B + C)x + (A + D)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Отсюда приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} x^3 : 0 &= C, \\ x^2 : 0 &= -A + D, \\ x^1 : 0 &= -2B + C, \\ x^0 : 1 &= A + D, \end{aligned}$$

решая которую, находим $A = D = \frac{1}{2}$, $B = C = 0$. Подставляя в формулу Остроградского, получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

468. Согласно формуле Остроградского,

$$\int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 + 1} + D \int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{Ex + F}{x^2 - x + 1} dx.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$\begin{aligned} 1 \equiv & -Ax^4 - 2Bx^3 - 3Cx^2 + 2Ax + B + D(x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1) + \\ & + (Ex + F)(x^4 + x^3 + x + 1), \end{aligned}$$

откуда $x^5 : 0 = D + E$,

$$\begin{aligned} x^4 : 0 &= -A - D + E + F, \\ x^3 : 0 &= -2B + D + F, \\ x^2 : 0 &= -3C + D + E, \\ x^1 : 0 &= 2A - D + E + F, \\ x^0 : 1 &= B + D + F. \end{aligned}$$

Решая систему, находим $A = C = 0$, $B = \frac{1}{3}$, $D = -E = \frac{2}{9}$, $F = \frac{4}{9}$. Итак,

$$\int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2} = \frac{x}{3(x^3 + 1)} + \frac{2}{9} \ln |x + 1| - \frac{2}{9} \int \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} dx =$$

$$= \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \quad (x \neq -1).$$

469. Поскольку $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$, то разложение, согласно формуле Остроградского, ищем в виде

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} dx,$$

откуда, дифференцируя равенство и приводя дроби к общему знаменателю, получаем тождество

$$1 \equiv A(x^2 + x + 1) - (Ax + B)(2x + 1) + (x^2 + x + 1)(Cx + D), \text{ а значит}$$

$$\begin{aligned} x^3 : 0 &= C, \\ x^2 : 0 &= -A + D + C, \\ x^1 : 0 &= D - 2B + C, \\ x^0 : 1 &= A - B + D. \end{aligned}$$

Отсюда находим $A = D = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$ и, подставляя в формулу Остроградского, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} &= \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \\ &= \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

470. Воспользуемся методом Остроградского:

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} dx = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{(1-x)^2(1+x^2)} + \int \frac{Kx^2 + Lx + M}{(1-x)(1+x^2)} dx.$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} = \left(\frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{(1-x)^2(1+x^2)} \right)' + \frac{Kx^2 + Lx + M}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Вычислим в правой части производную, после чего приведём обе дроби в правой части к общему знаменателю. Получим равенство двух дробей с одинаковыми знаменателями. Следовательно, числители также должны быть равны. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях, получаем систему линейных уравнений, решая которую, находим

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{3}{2}, \quad D = -1, \quad K = 0, \quad L = -\frac{1}{2}, \quad M = \frac{1}{2}.$$

Подставляя в формулу Остроградского, получаем

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} dx &= \frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{2(1-x)^2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{-x+1}{(1-x)(1+x^2)} dx = \\ &= \frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{2(1-x)^2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.\end{aligned}$$

471. Воспользуемся методом Остроградского:

$$\int \frac{x^4 + x^3 + x + 4}{(x^3 + 1)^2} dx = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 + 1} + \int \frac{Dx^2 + Ex + F}{x^3 + 1} dx.$$

Дифференцируя по x , получаем

$$\frac{x^4 + x^3 + x + 4}{(x^3 + 1)^2} = \frac{(2Ax + B)(x^3 + 1) - (Ax^2 + Bx + C) \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} + \frac{Dx^2 + Ex + F}{x^3 + 1}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и приравнявая числители, получаем тождество

$$x^4 + x^3 + x + 4 \equiv Dx^5 + (E - A)x^4 + (F - 2B)x^3 + (D - 3C)x^2 + (2A + E)x + (B + F).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, приходим к системе

$$\begin{aligned}x^5 : 0 &= D, \\ x^4 : 1 &= E - A, \\ x^3 : 1 &= F - 2B, \\ x^2 : 0 &= D - 3C, \\ x^1 : 1 &= 2A + E, \\ x^0 : 4 &= B + F,\end{aligned}$$

откуда находим $A = C = D = 0$, $B = E = 1$, $F = 3$. Подставляя в формулу Остроградского, получаем для интеграла

$$\int \frac{x^4 + x^3 + x + 4}{(x^3 + 1)^2} dx = \frac{x}{x^3 + 1} + \int \frac{x + 3}{x^3 + 1} dx.$$

Осталось вычислить интеграл $I = \int \frac{x + 3}{x^3 + 1} dx = \int \left(\frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1} \right) dx$.

Методом неопределённых коэффициентов находим $a = -b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{7}{3}$ и т. д.

472. Выделяя целую часть, получаем

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4} = \int dx - \int \frac{5x^2 + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

Так как $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$, положим в подынтегральной функции во втором интеграле $t = x^2$ и получим

$$\frac{5t + 4}{(t + 1)(t + 4)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t + 4},$$

откуда находим $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{16}{3}$. Поэтому

$$\int \frac{(5x^2 + 4)dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{16}{3} \int \frac{dx}{x^2 + 4} = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

Ответ: $x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.

473. Имеем

$$\int \frac{x dx}{x^3 - 1} = \int \frac{x dx}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}.$$

Разложим на элементарные дроби:

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1},$$

откуда находим $A = -B = C = \frac{1}{3}$, тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^3 - 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{3} \int \frac{(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x - 1)^2}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

474. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^6 + 1} &= \frac{(x^4 + 1) + (1 - x^4)}{2(x^6 + 1)} = \frac{x^4 + 1}{2(x^6 + 1)} + \frac{1 - x^4}{2(x^6 + 1)} = \\ &= \frac{(x^4 - x^2 + 1) + x^2}{2(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{(1 - x^2)(1 + x^2)}{2(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \\ &= \frac{1}{2(x^2 + 1)} + \frac{x^2}{2(x^6 + 1)} - \frac{x^2 - 1}{2(x^4 - x^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых интегрируются легко, поэтому найдём разложение на простые дроби только последнего слагаемого. Поскольку $x^4 - x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 3x^2$, то получаем:

$$\frac{1 - x^2}{2(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{1 - x^2}{2(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{3}x + 1},$$

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \equiv (Ax + B)(x^2 - \sqrt{3}x + 1) + (Cx + D)(x^2 + \sqrt{3}x + 1),$$

откуда методом неопределённых коэффициентов приходим к системе:

$$\begin{aligned} x^3 : 0 &= A + C, \\ x^2 : -\frac{1}{2} &= -\sqrt{3}A + B + \sqrt{3}C + D, \\ x^1 : 0 &= A - \sqrt{3}B + C + \sqrt{3}D, \\ x^0 : \frac{1}{2} &= B + D. \end{aligned}$$

Отсюда $A = -C = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $B = D = \frac{1}{4}$, поэтому

$$\frac{1}{x^6 + 1} = \frac{1}{2(x^2 + 1)} + \frac{x^2}{2(x^6 + 1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2 - \sqrt{3}x + 1}.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x^3 + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{3}x + 1}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + C.$$

475. 1-й способ. Положим $t = x - 1$, тогда приходим к простому интегралу $\int \frac{(t+1)^3 dt}{t^{100}}$.

2-й способ. Раскладывая по формуле Тейлора функцию x^3 по целым неотрицательным степеням $(x - 1)$, получаем

$$x^3 = 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 + (x - 1)^3.$$

Поэтому при $x \neq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{(x - 1)^{100}} &= \int \frac{(1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 + (x - 1)^3) dx}{(x - 1)^{100}} = \\ &= \int \frac{dx}{(x - 1)^{100}} + 3 \int \frac{dx}{(x - 1)^{99}} + 3 \int \frac{dx}{(x - 1)^{98}} + \int \frac{dx}{(x - 1)^{97}} = \\ &= -\frac{1}{99(x - 1)^{99}} - \frac{3}{98(x - 1)^{98}} - \frac{3}{97(x - 1)^{97}} - \frac{1}{96(x - 1)^{96}} + C. \end{aligned}$$

476. Сделаем подстановку $t = x^5$, тогда $5x^4 dx = dt$ и, переходя под знаком интеграла к новой переменной интегрирования, получаем

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^{10} - 10)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{(t^2 - 10)^2}.$$

Далее возможны разные способы решения.

1-й способ (разложение на простейшие дроби). Перепишем интеграл в виде

$$\frac{1}{5} \int \frac{dt}{(t^2 - 10)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{(t - \sqrt{10})^2(t + \sqrt{10})^2}.$$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{1}{(t - \sqrt{10})^2(t + \sqrt{10})^2} \equiv \frac{A}{t - \sqrt{10}} + \frac{B}{(t - \sqrt{10})^2} + \frac{C}{t + \sqrt{10}} + \frac{D}{(t + \sqrt{10})^2}.$$

Приводя справа дроби к общему знаменателю, приравниваем многочлены, расположенные слева и справа в числителях:

$$1 \equiv A(t - \sqrt{10})(t + \sqrt{10})^2 + B(t + \sqrt{10})^2 + C(t - \sqrt{10})^2(t + \sqrt{10}) + D(t - \sqrt{10})^2.$$

При $t = \sqrt{10}$ получаем $1 = 40B \Rightarrow B = \frac{1}{40}$,

при $t = -\sqrt{10}$ получаем $1 = 40D \Rightarrow D = \frac{1}{40}$,

приравнивая, дополнительно, коэффициенты при t^3 и t^0 , получаем:

$$t^3 : 0 = A + C,$$

$$t^0 : 1 = -10\sqrt{10}A + 10B + 10\sqrt{10}C + 10D,$$

т. е. $C = \frac{1}{40\sqrt{10}}, A = -\frac{1}{40\sqrt{10}}.$

Подставляя полученное разложение в интеграл, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \int \frac{dt}{(t - \sqrt{10})^2(t + \sqrt{10})^2} &= -\frac{1}{200\sqrt{10}} \int \frac{d(t - \sqrt{10})}{t - \sqrt{10}} + \\ &+ \frac{1}{200} \int \frac{d(t - \sqrt{10})}{(t - \sqrt{10})^2} + \frac{1}{200\sqrt{10}} \int \frac{d(t + \sqrt{10})}{t + \sqrt{10}} + \frac{1}{200} \int \frac{d(t + \sqrt{10})}{(t + \sqrt{10})^2} = \\ &= \frac{1}{200\sqrt{10}} \ln \left| \frac{t + \sqrt{10}}{t - \sqrt{10}} \right| - \frac{1}{200(t - \sqrt{10})} - \frac{1}{200(t + \sqrt{10})} + C = \\ &= -\frac{1}{100} \left(\frac{x^5}{x^{10} - 10} + \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x^5 - \sqrt{10}}{x^5 + \sqrt{10}} \right| \right) + C \quad (x \neq \pm \sqrt[10]{10}). \end{aligned}$$

2-й способ (метод Остроградского). Имеем

$$\int \frac{dt}{(t^2 - 10)^2} = \frac{at + b}{t^2 - 10} + \int \frac{ct + d}{t^2 - 10} dt.$$

Дифференцируя и применяя метод неопределённых коэффициентов, находим

$$\begin{cases} a = d = -\frac{1}{20}, \\ b = c = 0. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2 - 10)^2} &= -\frac{1}{20} \cdot \frac{t}{t^2 - 10} - \frac{1}{20} \int \frac{dt}{t^2 - 10} = \\ &= -\frac{1}{20} \cdot \frac{t}{t^2 - 10} - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{10}}{t + \sqrt{10}} \right| + C, \quad \text{где } t = x^5. \end{aligned}$$

3-й способ (метод алгебраических преобразований). Перепишем интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2 - 10)^2} &= \frac{1}{40} \int \frac{((t + \sqrt{10}) - (t - \sqrt{10}))^2}{(t - \sqrt{10})^2(t + \sqrt{10})^2} dt = \\ &= \frac{1}{40} \int \left(\frac{1}{(t - \sqrt{10})^2} - \frac{2}{t^2 - 10} + \frac{1}{(t + \sqrt{10})^2} \right) dt \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

477. Положим $t = x^4$, тогда $4x^3 dx = dt$ и получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2} &= \frac{1}{4} \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 3t + 2} = \frac{1}{4} \int dt - \frac{1}{4} \int \frac{3t + 2}{t^2 + 3t + 2} dt = \\ &= \frac{t}{4} - \frac{1}{4} \int \frac{3(t + \frac{3}{2}) - \frac{5}{2}}{(t + \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{2}} dt = \dots = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4 + 1}{(x^4 + 2)^4} + C. \end{aligned}$$

478. Имеем при $x \neq 0$:

$$\int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)} = \int \frac{x^9 dx}{x^{10}(x^{10} + 2)} = \frac{1}{10} \int \frac{d(x^{10})}{x^{10}(x^{10} + 2)} =$$

(положим $t = x^{10}$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10} \int \frac{dt}{t(t + 2)} = \frac{1}{10} \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t + 2} \right) dt = \frac{1}{10} \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t} + \frac{-\frac{1}{2}}{t + 2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{20} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + 2} \right) dt = \frac{1}{20} \ln \left| \frac{t}{t + 2} \right| + C = \frac{1}{20} \ln \left| \frac{x^{10}}{x^{10} + 2} \right| + C. \end{aligned}$$

479. Конечно, можно вычислить этот интеграл стандартным образом, раскладывая подынтегральную функцию в сумму шести элементарных дробей.

Однако удачная замена $x = \frac{1+t}{1-t}$ позволяет существенно упростить решение.

Имеем $dx = \frac{2dt}{(1-t)^2}$, $x^2 - 1 = \frac{4t}{(1-t)^2}$, тогда при $x \neq \pm 1$ получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^3} = \frac{1}{32} \int \frac{(1-t)^4}{t^3} dt = -\frac{1}{64t^2} + \frac{1}{8t} + \frac{3}{16} \ln |t| - \frac{t}{8} + \frac{t^2}{64} + C$$

и делаем обратную подстановку $t = (x - 1)/(x + 1)$.

480. Сделаем подстановку $t = \frac{x-2}{x+3}$, тогда $x = \frac{3t+2}{1-t}$, $dx = \frac{5dt}{(t-1)^2}$,
 $x-2 = \frac{5t}{1-t}$, $x+3 = \frac{5}{1-t}$, поэтому при $x \neq -3$; 2

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3} &= \frac{1}{625} \int \frac{(1-t)^3}{t^2} dt = \frac{1}{625} \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{3}{t} + 3 - t \right) dt = \\ &= \frac{1}{625} \left(-\frac{1}{t} - 3 \ln |t| + 3t - \frac{t^2}{2} \right) + C, \quad \text{где } t = \frac{x-2}{x+3}. \end{aligned}$$

10 СЕМИНАР: Интегрирование иррациональностей

«В древности люди учились для того, чтобы совершенствовать себя.

Нынче учатся для того, чтобы удивить других».

Конфуций (551 г. до н. э.—479 г. до н. э.) – древний мыслитель и философ Китая.

Основной подход при интегрировании функций, содержащих переменную под знаком радикала, состоит в подборе рационализирующих подстановок, т. е. таких подстановок, которые приводят подынтегральное выражение к рациональному виду. Назовём этот подход *методом рационализации* подынтегрального выражения. Рассмотрим некоторые из наиболее известных классов интегралов от иррациональных функций.

Обратимся вначале к интегрированию алгебраических иррациональностей.

10.1 Интегрирование линейных и дробно-линейных иррациональностей

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx, \quad \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

Здесь под $R(x, y)$ понимается рациональная функция двух аргументов, т. е. отношение двух алгебраических многочленов соответственно степеней n, m : $R(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$. При этом многочленом степени n с двумя переменными x и y называется выражение вида

$$P_n(x, y) = a_{n0}x^n + a_{0n}y^n + a_{(n-1)1}x^{n-1}y + a_{1(n-1)}xy^{n-1} + \dots \\ \dots + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij}x^i y^j,$$

$i, j = \overline{0, n}$, где суммарная степень $i + j$ каждого одночлена неотрицательна и не превышает n , причём среди коэффициентов $a_{n0}, a_{(n-1)1}, a_{(n-2)2}, \dots, a_{0n}$ есть хотя бы один, отличный от нуля.

Дробно-линейной иррациональностью назовём функцию вида $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где $n \in \mathbb{N}, n > 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ – постоянные, $ad - bc \neq 0, c \neq 0$. В случае $c = 0, a \neq 0$ получим, в частности, *линейную иррациональность* $R(x, \sqrt[n]{Ax+B})$, где $A = \frac{a}{d}, B = \frac{b}{d}$. Рационализация дробно-линейных

иррациональностей $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ осуществляется с помощью подстановки

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx,$$

где рациональные степени $\frac{p_i}{q_i}$ ($p_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}$) – несократимые дроби, находятся с помощью рационализирующей подстановки

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad \text{где } n = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_k).$$

Рассмотрим примеры.

Пример 130. Найти $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx$.

Решение. Под знаком интеграла имеется линейная иррациональность $\sqrt{x+9}$, поэтому положим $t = \sqrt{x+9}$, тогда $x = t^2 - 9$, $dx = 2tdt$ и, переходя к новой переменной, получим ($x \geq -9$, $x \neq 0$)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx &= 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 - 9} = 2 \int \frac{(t^2 - 9) + 9}{t^2 - 9} dt = 2 \int dt + 18 \int \frac{dt}{t^2 - 9} = \\ &= 2t + 3 \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = 2\sqrt{x+9} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3} \right| + C. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 131. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

Решение. Имеем $\text{НОК}(2, 3) = 6$, поэтому для рационализации подынтегральной функции применим подстановку $t = \sqrt[6]{x}$, в результате освобождаясь от обоих радикалов. Тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$ и интеграл от иррациональной функции оказывается сведённым к интегралу от рациональной функции:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} &= 6 \int \frac{t^5 dt}{1+t^2} = 6 \int \frac{(1+t^2) - 1}{1+t^2} dt = 6 \left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \right) = \\ &= 6(t - \arctg t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \arctg \sqrt[6]{x}) + C \quad (x > 0). \quad \square \end{aligned}$$

10.2 Интегрирование квадратичных иррациональностей

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов, a, b, c – некоторые действительные постоянные, $a \neq 0$.¹ Обратимся вначале к некоторым важным частным классам таких интегралов.

10.2.1 Важные частные случаи квадратичных иррациональностей

«Когда читаешь умные слова других, в голову приходят собственные умные мысли».

Михаил Лашков (р. 1965) – ген. директор Агентства по борьбе с коррупцией в РФ при Антикоррупционном Совете. Активно ведёт персональный сайт, на котором публикует собственные афоризмы и замечания о российской действительности. В свободное от борьбы с коррупцией время занимается благотворительностью через Фонд поддержки правоохранительных органов РФ «Фонд Милиции».

1) *Интегралы вида $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$.*

Интегралы указанного вида выделением полного квадрата под знаком радикала приводятся к одному из двух типов интегралов

$$\int \sqrt{A^2 - t^2} dt \quad \text{или} \quad \int \sqrt{t^2 + A} dt.$$

Действительно, выделив полный квадрат, получим

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \int \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c} dx.$$

Далее, если $a > 0$, то подстановкой $t = x + \frac{b}{2a}$ интеграл приводится к виду $\int \sqrt{t^2 + A} dt$ (с точностью до коэффициента); если же $a < 0$ и $c - \frac{b^2}{4a} > 0$ аналогичной подстановкой получаем интеграл вида $\int \sqrt{A^2 - t^2} dt$. Вычислим эти интегралы.

Пример 132. Найти $\int \sqrt{A^2 - t^2} dt$ ($A > 0$).

¹При этом будем дополнительно считать, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет кратного корня, т. е. не представим в виде $a(x - x_1)^2$, иначе корень из этого выражения является рациональным.

Интегрируя по частям, положим $u = \sqrt{A^2 - t^2}$, $dv = dt$, откуда $du = -\frac{tdt}{\sqrt{A^2 - t^2}}$, $v = t$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{A^2 - t^2} dt &= t\sqrt{A^2 - t^2} - \int \frac{-t^2 dt}{\sqrt{A^2 - t^2}} = t\sqrt{A^2 - t^2} - \int \frac{A^2 - t^2 - A^2}{\sqrt{A^2 - t^2}} dt = \\ &= t\sqrt{A^2 - t^2} - \int \sqrt{A^2 - t^2} dt + A^2 \arcsin \frac{t}{A}. \end{aligned}$$

Выражая из полученного равенства искомый интеграл, находим окончательно:

$$\int \sqrt{A^2 - t^2} dt = \frac{t}{2} \sqrt{A^2 - t^2} + \frac{A^2}{2} \arcsin \frac{t}{A} + C \quad (|t| \leq A). \quad \square$$

Пример 133. Найти $\int \sqrt{t^2 + A} dt$ ($A \neq 0$).

Проинтегрируем по частям. Положим $u = \sqrt{t^2 + A}$, $dv = dt$. Тогда

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{t^2 + A} dt &= t\sqrt{t^2 + A} - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 + A}} = t\sqrt{t^2 + A} - \int \frac{t^2 + A - A}{\sqrt{t^2 + A}} dt = \\ &= t\sqrt{t^2 + A} + A \ln |t + \sqrt{t^2 + A}| - I. \end{aligned}$$

Откуда находим окончательно, выражая I :

$$I = \int \sqrt{t^2 + A} dt = \frac{t}{2} \sqrt{t^2 + A} + \frac{A}{2} \ln |t + \sqrt{t^2 + A}| + C \quad (t^2 + A \geq 0). \quad \square$$

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 134. Вычислить $\int \sqrt{x^2 + 8x + 25} dx$.

Решение. Выделяя полный квадрат, получим

$$\begin{aligned} \int \sqrt{(x^2 + 8x + 16) + 9} dx &= \int \sqrt{(x + 4)^2 + 9} dx = \int \sqrt{(x + 4)^2 + 9} d(x + 4) = \\ &= \frac{x + 4}{2} \sqrt{x^2 + 8x + 25} + \frac{9}{2} \ln |x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 25}| + C. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 135. $\int \sqrt{-x^2 + 2x + 8} dx$.

Решение. Выделяя под радикалом полный квадрат, при $x \in [-2; 4]$ имеем

$$\int \sqrt{9 - (x - 1)^2} dx = \frac{x - 1}{2} \sqrt{-x^2 + 2x + 8} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x - 1}{3} + C. \quad \square$$

2) *Интегралы вида* $\int (Ax + B) \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$.

Интегралы данного вида вычисляются выделением в выражении $Ax + B$ производной $2ax + b$ от подкоренного выражения с последующим разбиением в сумму двух табличных интегралов:

$$\begin{aligned} & \int (Ax + B) \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \\ &= \int \left(\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \right) \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} d(ax^2 + bx + c) + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \\ &= \frac{A}{3a} \sqrt{(ax^2 + bx + c)^3} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \cdot I, \end{aligned}$$

где интеграл I вычислялся выше.

Пример 136. Найти $\int (2x + 7) \sqrt{x^2 + x + 1} dx$.

Решение. Так как $(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$, то имеем

$$\begin{aligned} & \int ((2x + 1) + 6) \sqrt{x^2 + x + 1} dx = \int (2x + 1) \sqrt{x^2 + x + 1} dx + 6 \int \sqrt{x^2 + x + 1} dx = \\ &= \int \sqrt{x^2 + x + 1} d(x^2 + x + 1) + 6 \int \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 + x + 1)^3} + \\ &+ 6 \left(\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{8} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| \right) + C = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 + x + 1)^3} + 3 \left(x + \frac{1}{2} \right) \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{9}{4} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C. \quad \square \end{aligned}$$

3) *Интегралы вида* $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.

Интегралы указанного вида путём выделения полного квадрата из квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ под знаком радикала приводятся к табличным интегралам

$$\int \frac{dt}{\sqrt{A^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{A} + C \text{ или } \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + A}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 + A} \right| + C.$$

Пример 137. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2 + 4x - 1}}$.

Решение. Выделяя полный квадрат по переменной x , преобразуем интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(x - \frac{2}{3})}{\sqrt{\frac{1}{9} - (x - \frac{2}{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(3x - 2) + C, \quad x \in \left(\frac{1}{3}, 1 \right). \quad \square$$

Пример 138. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$.

Решение. Выделяя полный квадрат по переменной x , преобразуем квадратный трёхчлен к виду $(x + 1)^2 + 4$. В результате приходим к интегралу

$$\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}} = \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right| + C. \square$$

4) *Интегралы вида* $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$.

Интегралы указанного вида чаще всего вычисляются выделением в числителе дроби производной от подкоренного выражения:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + (B - \frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Пример 139. Найти $\int \frac{5x - 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x - 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} dx &= \int \frac{\frac{5}{4}(4x + 8) - 13}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} dx = \frac{5}{4} \int \frac{d(2x^2 + 8x + 1)}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} - \\ &- 13 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} = \frac{5}{2} \sqrt{2x^2 + 8x + 1} - \frac{13}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + \frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{5}{2} \sqrt{2x^2 + 8x + 1} - \frac{13}{\sqrt{2}} \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + \frac{1}{2}} \right| + C, \end{aligned}$$

где $x \in \left[-2 - \frac{\sqrt{14}}{2}; -2 + \frac{\sqrt{14}}{2} \right]$. $\square$

Пример 140. Найти $\int \frac{3x + 4}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}} dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 4}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}} dx &= \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x + 6) + 13}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}} dx = \\ &= -\frac{3}{2} \int \frac{d(-x^2 + 6x - 8)}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}} + 13 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x - 3)^2}} = \end{aligned}$$

$$= -3\sqrt{-x^2 + 6x - 8} + 13 \arcsin(x - 3) + C, \quad x \in (2, 4). \quad \square$$

5) *Интегралы вида* $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$.

Интегралы данного вида, где $P_n(x)$ – алгебраический многочлен n -й степени, находятся с помощью тождества

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (1)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен $(n-1)$ -й степени с неопределёнными коэффициентами, λ ещё один неопределённый коэффициент. Дифференцируя это тождество и умножая на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, получим равенство двух многочленов:

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2 + bx + c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax + b) + \lambda,$$

из которого методом неопределённых коэффициентов можно определить коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ .

Пример 141. Найти $\int \frac{x^3 - 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$.

Решение. Воспользуемся формулой (1):

$$\int \frac{x^3 - 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = (ax^2 + bx + c) \sqrt{x^2 + x + 1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Дифференцируя это тождество, имеем

$$\frac{x^3 - 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = (2ax + b) \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{(ax^2 + bx + c)(2x + 1)}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + x + 1}},$$

откуда, умножая на $2\sqrt{x^2 + x + 1}$, получим

$$2(x^3 - 2) = (4ax + 2b)(x^2 + x + 1) + (ax^2 + bx + c)(2x + 1) + 2\lambda.$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов a, b, c и λ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} x^3: \quad & 2 = 4a + 2a, \\ x^2: \quad & 0 = 4a + 2b + a + 2b, \\ x^1: \quad & 0 = 4a + 2b + b + 2c, \\ x^0: \quad & -4 = 2b + c + 2\lambda, \end{aligned}$$

откуда определяем $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{5}{12}$, $c = -\frac{1}{24}$, $\lambda = -\frac{25}{16}$. Следовательно,

$$\int \frac{x^3 - 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{24} \right) \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{25}{16} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{24} \right) \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{25}{16} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C. \square$$

6) Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (x \in \mathbb{N}).$

Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (n = 1)$ берутся с помощью подстановки $t = \frac{1}{x - \alpha}$. В результате они приводятся к интегралам типа $\int \frac{dt}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}$. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ также вычисляются с помощью замены $t = \frac{1}{x - \alpha}$. Тогда $x = \frac{1}{t} + \alpha$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $ax^2 + bx + c = \frac{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a}{t^2}$ и получаем, что

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}} = - \int \frac{t^{n-1} dt}{\sqrt{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a}}$$

(т. е. интеграл сводится к интегралу предыдущего типа).

Пример 142. Найти $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}$.

Решение. Положим $t = \frac{1}{x}$, тогда $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$ и, подставляя в интеграл, получим (при $t > 0$):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 2x + 1}} &= - \int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2} - \frac{2}{t} + 1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2t + 5}} = \\ &= - \ln \left| t - 1 + \sqrt{t^2 - 2t + 5} \right| + C = - \ln \left| \frac{1}{x} - 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 5} \right| + C \quad (x > 0). \square \end{aligned}$$

7) Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x^2 + a)^n \cdot \sqrt{bx^2 + c}} \quad (n \in \mathbb{Z}).$

Интегралы этого типа при $bc \neq 0$ вычисляются подстановкой $t = (\sqrt{bx^2 + c})' = \frac{bx}{\sqrt{bx^2 + c}}$. Тогда $x^2 = \frac{ct^2}{b(b - t^2)}$, $xdx = \frac{ctdt}{(t^2 - b)^2}$ и, умножая и деля подынтегральную дробь на bx^2 , получим

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a)^n \sqrt{bx^2 + c}} = \frac{1}{b} \int \frac{1}{x^2(x^2 + a)^n} \left(\frac{bx}{\sqrt{bx^2 + c}} \right) xdx =$$

$$= \frac{1}{b} \int \frac{1}{\frac{ct^2}{b(b-t^2)} \left(\frac{ct^2}{b(b-t^2)} + a \right)^n} \cdot t \cdot \frac{ctdt}{(t^2 - b)^2}.$$

Пример 143. Найти $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}}$.

Решение. Положим $t = (\sqrt{x^2 + 2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$, тогда $x^2 = \frac{2t^2}{1-t^2}$, $x^2 + 1 = \frac{t^2 + 1}{1-t^2}$, $xdx = \frac{2tdt}{(1-t^2)^2}$. Для удобства преобразований умножим и разделим подынтегральное выражение на x^2 :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}} &= \int \frac{x \cdot xdx}{\sqrt{x^2 + 2} \cdot x^2 \cdot (x^2 + 1)} = \int \frac{t \cdot \frac{2tdt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2t^2}{1-t^2} \cdot \frac{t^2+1}{1-t^2}} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} + C. \square \end{aligned}$$

8) *Интегралы вида* $\int \frac{xdx}{(x^2 + a)^n \cdot \sqrt{bx^2 + c}}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Интегралы данного вида при $bc \neq 0$ рационализируются подстановкой $t = \sqrt{bx^2 + c}$. Тогда $x^2 = \frac{t^2 - c}{b}$, $xdx = \frac{tdt}{b}$ и интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a)^n \cdot \sqrt{bx^2 + c}} = \frac{1}{b} \int \frac{t dt}{\left(\frac{t^2 - c}{b} + a\right)^n \cdot t}.$$

Пример 144. Найти $\int \frac{xdx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}}$.

Решение. Положим $t = \sqrt{x^2 + 2}$, тогда $x^2 = t^2 - 2$, $xdx = tdt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 2} - 1}{\sqrt{x^2 + 2} + 1} \right| + C. \square$$

9) *Интегралы вида* $\int \frac{R(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, где $R(x) = \frac{T_k(x)}{Q_m(x)}$ – рациональная функция, $T_k(x), Q_m(x)$ – целые алгебраические многочлены соответственно степеней k и m . Выделяя при $k \geq m$ из рациональной дроби $R(x)$ целую часть – многочлен $S(x)$

$$R(x) = S_{k-m}(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad (n < m)$$

и раскладывая полученную правильную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в сумму простейших дробей, получаем, что интегрирование функций $\frac{R(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ приводится к

вычислению рассмотренных выше интегралов трёх типов:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad \int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad \int \frac{(Ax + B)dx}{(x^2 + px + q)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, а вычисление последнего типа интегралов при $n \in \mathbb{N}$ рассматривается, например, в [22].

Пример 145. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x - 1}}$.

Решение. Полагая $y = x + \frac{1}{2}$, приходим к интегралу $\int \frac{dy}{(y^2 + \frac{3}{4})\sqrt{y^2 - \frac{5}{4}}}$, который рационализируется подстановкой $t = \left(\sqrt{y^2 - \frac{5}{4}}\right)' = \frac{y}{\sqrt{y^2 - \frac{5}{4}}}$, откуда $\frac{dy}{\sqrt{y^2 - \frac{5}{4}}} = \frac{dt}{1 - t^2}$. Подставляя в интеграл, имеем

$$\int \frac{dt}{\frac{3}{4} - 2t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{8}t}{\sqrt{3} - \sqrt{8}t} \right| + C, \quad \text{где } t = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 1}}. \quad \square$$

10) Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)dx.$$

Рассмотрим вычисление этих интегралов с помощью тригонометрических и гиперболических подстановок.

Рационализацию подынтегральной функции $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ ($a > 0$) можно проводить с помощью тригонометрической подстановки $x = a \sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. При этом если t пробегает отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то переменная x , соответственно, пробегает отрезок $[-a, a]$, что отвечает ОДЗ интеграла. Тогда $\sqrt{a^2 - x^2} = a|\cos t| = a \cos t$, так как на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ косинус принимает неотрицательные значения. При этом алгебраическое иррациональное выражение $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ преобразуется к виду тригонометрического рационального выражения $R(a \sin t, a \cos t)$. В случае $R\left(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ имеем, с учётом

ОДЗ, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а в случае $R\left(x, \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$, соответственно, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Для данных интегралов возможна также подстановка $x = a \cos t$, где $t \in [0, \pi]$, и тогда вместо иррациональной функции $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ получили бы рациональную тригонометрическую функцию $R(a \cos t, a \sin t)$.

Кроме того, интегралы указанного типа рационализируются гиперболической подстановкой $x = a \operatorname{th} t$, $t \in \mathbb{R}$, тогда

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}} = \frac{a}{\operatorname{ch} t}.$$

Пример 146. Найти $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$).

Решение. Сделаем тригонометрическую подстановку $x = a \sin t$. Поскольку по ОДЗ $x \in [-a, a]$, то положим $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$, $dx = a \cos t dt$, и получаем

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t d(2t) \right) = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \cos \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \right) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C \quad (|x| \leq a). \end{aligned}$$

Замечание. Можно воспользоваться подстановкой $x = a \cos t$, где $t \in [0, \pi]$. $\square$

Пример 147. Найти $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$ ($a > 0$).

Решение. 1-й способ. Положим $x = a \sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$, $dx = a \cos t dt$, и приходим к интегралу

$$\begin{aligned} a \int \sqrt{\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}} \cos t dt &= a \int \sqrt{\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin t}{1 + \sin t}} \cos t dt = \\ &= a \int \frac{(1 + \sin t) \cos t}{|\cos t|} dt = a \int (1 + \sin t) dt = a(t - \cos t) + C = \\ &= a \left(\arcsin \frac{x}{a} - \cos \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \right) + C = a \arcsin \frac{x}{a} - a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} + C = \\ &= a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C \quad (-a \leq x < a). \end{aligned}$$

2-й способ. Для сравнения решим задачу с помощью подстановки $x = a \cos 2t$, где $2t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $dx = -2a \sin 2t dt$, $2t = \arccos \frac{x}{a}$,

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\frac{1 + \cos 2t}{1 - \cos 2t}} = \sqrt{\frac{2 \cos^2 t}{2 \sin^2 t}} = \frac{\cos t}{|\sin t|} = \operatorname{sgn}(\sin t) \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{sgn}(t) \cdot \frac{\cos t}{\sin t}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= -4a \operatorname{sgn}(t) \int \cos^2 t dt = -4a \operatorname{sgn}(t) \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) + C = \\
 &= -a|2t| - a \sin |2t| + C = -a \left| \arccos \frac{x}{a} \right| - a \sin \left| \arccos \frac{x}{a} \right| + C = \\
 &= -a \arccos \frac{x}{a} - a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} + C = -a \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{a} \right) - \sqrt{a^2 - x^2} + C = \\
 &= a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C_1. \quad \square
 \end{aligned}$$

3-й способ. Посмотрим, как решается та же задача с помощью гиперболической подстановки $x = a \operatorname{th} t$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= \int \sqrt{\frac{a(1+\operatorname{th} t)}{a(1-\operatorname{th} t)}} \cdot \frac{a dt}{\operatorname{ch}^2 t} = a \int \sqrt{\frac{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t}} \cdot \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \\
 &= a \int \frac{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}} \cdot \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = a \int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} + a \int \frac{d(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{ch}^2 t} = \\
 &= a \int \frac{d(\operatorname{sh} t)}{\operatorname{ch}^2 t} - \frac{a}{\operatorname{ch} t} = a \int \frac{d(\operatorname{sh} t)}{1 + \operatorname{sh}^2 t} - \frac{a}{\operatorname{ch} t} = a \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} t) - \frac{a}{\operatorname{ch} t} + C.
 \end{aligned}$$

Для записи ответа осталось выразить t через x : $x = a \operatorname{th} t$, откуда $\operatorname{th} t = \frac{x}{a} \Rightarrow t = \operatorname{arth} \frac{x}{a}$, где $\operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$ – аретангенс (функция, обратная к гиперболическому тангенсу). $\square$

11) *Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$.*

Для рационализации выражений вида $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ применяют тригонометрическую подстановку $x = a \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. При этом когда переменная t пробегает указанный интервал в направлении от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то переменная x один раз пробегает всё множество действительных чисел от $-\infty$ до ∞ (взаимно однозначная замена переменной). В этом случае для корня $\sqrt{a^2 + x^2}$ получаем:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{|\cos t|} = \frac{a}{\cos t},$$

так как на рассматриваемом интервале косинус положителен, $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$. В результате иррациональная функция $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ преобразуется к тригонометрическому виду $R\left(a \operatorname{tg} t, \frac{a}{\cos t}\right)$, не содержащему радикалов.

Пример 148. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ ($a > 0$).

Решение. Положим $x = a \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда приходим к интегралу

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int \frac{dt}{\sin t} &= \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{t}{2})}{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{t}{2})}{\operatorname{tg} \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{t}{2})}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} = \\ &= \frac{1}{a} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C, \quad \text{где } t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad (x \neq 0). \quad \square \end{aligned}$$

В данной ситуации можно было также использовать подстановку $x = a \operatorname{ctg} t$, $t \in (0, \pi)$. Тогда

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t} = a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}} = \frac{a}{|\sin t|} = \frac{a}{\sin t},$$

так как на рассматриваемом интервале синус положителен, $dx = -\frac{adt}{\sin^2 t}$. В результате иррациональная функция $R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ преобразуется к тригонометрическому виду $R\left(a \operatorname{ctg} t, \frac{a}{\sin t}\right)$.

Выражения $R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ ($a > 0$) рационализируются также с помощью гиперболической подстановки $x = a \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда с учётом $\operatorname{ch} t > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = a|\operatorname{ch} t| = a \operatorname{ch} t.$$

Пример 149. Найти $\int \sqrt{a^2+x^2} dx$ ($a > 0$).

Решение. Выполним гиперболическую подстановку $x = a \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$, $dx = a \operatorname{ch} t dt$, $\sqrt{a^2+x^2} = a \operatorname{ch} t$. Переходя к новой переменной, получаем интеграл

$$a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt = a^2 \int \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left(\int t dt + \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 2t d(2t) \right) = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \operatorname{sh} 2t + C.$$

Осталось сделать обратную подстановку. Из равенства $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{x}{a}$ находим, что $e^t = \frac{x \pm \sqrt{a^2+x^2}}{a}$. Так как $e^t > 0$, то $t = \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| - \ln a$. Очевидно, $\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \operatorname{sh} t \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2+x^2}$, поэтому окончательно получаем (число $-\frac{a^2}{2} \ln a$ вошло в C)

$$\int \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| + \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + C. \quad \square$$

12) *Интегралы вида*

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \int R\left(x, \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right) dx, \int R\left(x, \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\right) dx.$$

Для рационализации подынтегральных выражений применяют как тригонометрические, так и гиперболические подстановки.

Рассмотрим случай $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$. Подкоренное выражение определено при $|x| \geq a$. Возможны подстановки:

а) $x = \frac{a}{\sin t}$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, при этом радикал преобразуется следующим образом

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = a \sqrt{\frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t}} = a \sqrt{\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)^2} = a |\operatorname{ctg} t|,$$

и подынтегральная функция оказывается рационально зависящей от тригонометрических функций $R\left(\frac{a}{\sin t}, a |\operatorname{ctg} t|\right)$.

б) Аналогичная подстановка через косинус $x = \frac{a}{\cos t}$, где $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, приводит к следующим преобразованиям:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = a \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}} = a \cdot \sqrt{\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2} = a |\operatorname{tg} t|.$$

И опять подынтегральная функция принимает рациональный (относительно тригонометрических функций) вид $R\left(\frac{a}{\cos t}, a |\operatorname{tg} t|\right)$.

в) Подстановка $x = a \operatorname{ch} t$, $t \geq 0$ (если $x > 0$), или $x = -a \operatorname{ch} t$, $t \geq 0$ (если $x < 0$). Тогда

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = a \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = a |\operatorname{sh} t|,$$

и выражение $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$ приводится к виду $R(a \operatorname{ch} t, a |\operatorname{sh} t|)$.

При наличии радикала $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$ в подынтегральном выражении (ОДЗ: $x \in (-\infty, -a) \cup [a, +\infty)$) можно воспользоваться подстановкой $x = \frac{a}{\cos t}$, где $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, и тогда

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\cos t} - 1}{\frac{1}{\cos t} + 1}} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{2 \cos^2 \frac{t}{2}}} = \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|.$$

С другой стороны, в этом случае возможна подстановка $x = a \operatorname{ch} t$:

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{ch} t + 1}} = \sqrt{\frac{2 \operatorname{sh}^2 \frac{t}{2}}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}}} = \left| \operatorname{th} \frac{t}{2} \right|.$$

Ещё раз обратим внимание читателя на одно обстоятельство. Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2 - a^2}$ (или $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$), то в этом случае первообразная ищется на луче $x > a$ или на луче $x < -a$. Так как обычно нет никаких оснований предпочесть один луч другому, то часто выбирают тот луч, на котором будет более простая запись преобразованного подынтегрального выражения, т. е. луч $x > a$ (на другом луче $x < -a$ первообразная находится аналогичными рассуждениями). Поэтому, учитывая это, в указанных выше подстановках можно ограничиться уменьшенными вполнину промежутками по t :

$$x = \frac{a}{\sin t} \text{ при } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x = \frac{a}{\cos t} \text{ при } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ x = a \operatorname{ch} t \text{ при } t \in [0, +\infty).$$

Это позволяет при упрощении радикалов однозначно раскрывать модули. В этой ситуации можно использовать также функцию сигнум.

Наконец, данный вид интегралов рационализируется подстановкой $x = a \operatorname{cth} t$, где $t > 0$ на луче $x > a$ (или, соответственно, $t < 0$ на луче $x < -a$). Тогда

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \sqrt{\operatorname{cth}^2 t - 1} = a \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}} = \frac{a}{|\operatorname{sh} t|}.$$

Пример 150. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}$ ($x > a > 0$).

Решение. Применим тригонометрическую подстановку $x = \frac{a}{\cos t}$, где $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Имеем $dx = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t} = \frac{a \operatorname{tg} t dt}{\cos t}$, $\sqrt{(x^2 - a^2)^3} = a^3 \sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)^3} = a^3 \sqrt{\operatorname{tg}^6 t} = a^3 \operatorname{tg}^3 t$. Подставляя в интеграл, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\operatorname{tg}^2 t \cdot \cos t} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2 \sin t} + C.$$

Осталось сделать обратную подстановку. Так как $x = \frac{a}{\cos t}$, то $\cos t = \frac{a}{x}$, $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}} + C. \quad \square$$

Пример 151. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ($x > a > 0$).

Решение. *1-й способ.* Применим гиперболическую подстановку: $x = a \operatorname{ch} t$, $t > 0$. Тогда $dx = a \operatorname{sh} t dt$,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = a\sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = a|\operatorname{sh} t| = a \operatorname{sh} t,$$

и интеграл сводится к интегралу $\int dt = t + C$. Сделаем обратную подстановку: $x = a \operatorname{ch} t \Rightarrow \operatorname{ch} t = \frac{x}{a} \Rightarrow t = \operatorname{Arch} \frac{x}{a}$, где обратная функция к указанной ветви гиперболического косинуса имеет вид $\operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$. Итак,

$$\int dt = t + C = \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + C = \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right) + C = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1,$$

где в постоянную C_1 включено слагаемое $(-\ln a)$.

2-й способ. Воспользуемся гиперболической подстановкой $x = a \operatorname{cth} t$, $t > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{1}{a\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh}^2 t} - 1}} \cdot \frac{-a dt}{\operatorname{sh}^2 t} = - \int \frac{|\operatorname{sh} t|}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}} \cdot \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = \\ &= - \int \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = - \int \frac{d(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh}^2 t} = - \int \frac{d(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \ln \left| \frac{\operatorname{ch} t + 1}{\operatorname{ch} t - 1} \right| + C, \end{aligned}$$

где $\operatorname{cth} t = \frac{x}{a}$, откуда $t = \operatorname{arch} \frac{x}{a}$. Здесь $\operatorname{arch} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}$ — ареакотангенс (функция, обратная к гиперболическому котангенсу). $\square$

В некоторых случаях при вычислении интегралов рассматриваемого вида наряду с указанными подстановками можно применять и другие. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 152. Найти $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx$ ($x \geq a > 0$).

Решение. Положим $x - a = 2a \operatorname{sh}^2 t$, тогда $x + a = 2a(\operatorname{sh}^2 t + 1) = 2a \operatorname{ch}^2 t$, $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{2a \operatorname{sh}^2 t}{2a \operatorname{ch}^2 t}} = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$, $dx = 4a \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t dt$ и приходим к интегралу

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx = 4a \int \operatorname{sh}^2 t dt = 4a \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} dt = a \operatorname{sh} 2t - 2at + C.$$

Учитывая, что $\operatorname{sh} t = \sqrt{\frac{x-a}{2a}}$, $\operatorname{ch} t = \sqrt{\frac{x+a}{2a}}$, имеем $a \operatorname{sh} 2t = 2a \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = \sqrt{x^2 - a^2}$. Далее, $\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t = e^t$, отсюда

$$t = \ln(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) = \ln \left(\frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{2a}} \right) = \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}) - \ln \sqrt{2a}.$$

Окончательно получим

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}) + C_1, \quad \text{где } C_1 = C - \ln \sqrt{2a}. \quad \square$$

10.2.2 Рационализирующие подстановки Эйлера

«Когда жизнь экзаменует, первыми сдают нервы».

Философский анекдот.

13) Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ в общем случае могут вычисляться с помощью рационализирующих подстановок Эйлера.

1-я подстановка Эйлера применима в случае, когда $a > 0$. Положим

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$$

(можно также было положить $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a}$). Возведём это равенство в квадрат: $ax^2 + bx + c = (t - x\sqrt{a})^2$, откуда после упрощения выражаем x через t : $x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}$. Тогда

$$dx = 2 \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{(2\sqrt{at} + b)^2} dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a} = t - \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b} = \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{2\sqrt{at} + b}.$$

Переходя к новой переменной интегрирования, получаем интеграл от рациональной дроби, после вычисления которого останется сделать обратную подстановку

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}.$$

Пример 153. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} \quad (x^2 + a > 0).$

Поскольку старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, то применим 1-ю подстановку Эйлера: $\sqrt{x^2 + a} = t - x$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$x^2 + a = t^2 - 2tx + x^2, \quad \text{или} \quad x = \frac{t^2 - a}{2t}.$$

Дифференцируя данное равенство, находим $dx = \frac{t^2 + a}{2t^2} dt$, $\sqrt{x^2 + a} = \frac{t^2 + a}{2t}$. Подставляя в подынтегральное выражение, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C. \quad \square$$

Пример 154. Найти $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Решение. Так как старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, здесь также возможно применение 1-й подстановки Эйлера: $\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x$. Возведём это равенство в квадрат:

$$x^2 - x + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}.$$

Дифференцируя, находим $dx = \left(\frac{t^2 - 1}{2t - 1}\right)' dt = 2 \cdot \frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2} dt$. Переходя к новой переменной, получаем интеграл $2 \int \frac{t^2 - t + 1}{t(2t - 1)^2} dt$. Далее представляем подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей и вычисляем:

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{t^2 - t + 1}{t(2t - 1)^2} dt &= \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t - 1} + \frac{3}{(2t - 1)^2} \right) dt = 2 \int \frac{dt}{t} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t - \frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{3}{2} \int \frac{d(2t - 1)}{(2t - 1)^2} = 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln \left| t - \frac{1}{2} \right| - \frac{3}{2(2t - 1)} + C, \end{aligned}$$

где $t = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$. $\square$

2-я подстановка Эйлера применима при вычислении интегралов вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, если свободный член $c > 0$. Положим

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$$

(можно также было положить $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$) и возведём данное равенство в квадрат: $ax^2 + bx + c = x^2 t^2 + 2xt\sqrt{c} + c$. После упрощения и сокращения на $x \neq 0$ имеем для x : $x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}$. Тогда

$$dx = 2 \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2} dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c} = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2} t + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}.$$

В результате замены переменной приходим к интегралу от рациональной дроби, вычислив который, в конце подставим

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x}.$$

Пример 155. Найти $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Решение. Рассмотрим интеграл из предыдущего примера, но теперь вычислим его при помощи 2-й подстановки Эйлера (т. к. свободный член квадратного трёхчлена $c = 1 > 0$, это возможно). Положим $\sqrt{x^2 - x + 1} = xt - 1$, возведём в квадрат

$$x^2 - x + 1 = x^2 t^2 - 2xt + 1 \Rightarrow x = \frac{2t - 1}{t^2 - 1}.$$

Тогда $dx = -2 \cdot \frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2} dt$, $\sqrt{x^2 - x + 1} = xt - 1 = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 - 1}$, $x + \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t}{t - 1}$.

Подставляя в интеграл, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} &= \int \frac{-2t^2 + 2t - 2}{t(t-1)(t+1)^2} dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{2(t-1)} - \frac{3}{2(t+1)} - \frac{3}{(t+1)^2} \right) dt \\ &= 2 \ln |t| - \frac{1}{2} \ln |t-1| - \frac{3}{2} \ln |t+1| + \frac{3}{t+1} + C, \end{aligned}$$

где $t = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{x}$. $\square$

3-я подстановка Эйлера $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = t(x-\lambda)$ применяется при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ в случае, когда квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет различные вещественные корни λ и μ , т. е. $ax^2 + bx + c = a(x-\lambda)(x-\mu)$. Положим

$$\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = t(x-\lambda)$$

Возведём равенство в квадрат: $a(x-\lambda)(x-\mu) = t^2(x-\lambda)^2$. Сократим на $x-\lambda \neq 0$ и, выражая x через t , получим $x = \frac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}$. Дифференцируя, находим $dx = \frac{2a(\mu - \lambda)t}{(t^2 - a)^2} dt$, $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = t(x-\lambda) = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a}$. Подставляя в исходный интеграл, получаем интеграл от рациональной дроби. Вычислив его, в конце выполним подстановку

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - \lambda}.$$

Пример 156. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Решение. Для вычисления интеграла воспользуемся 3-й подстановкой Эйлера: $\sqrt{a^2 - x^2} = t(a-x)$. Возведём равенство в квадрат: $(a-x)(a+x) = t^2(a-x)^2$, откуда найдём $x = a \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$. Тогда получаем следующее соотношение между дифференциалами: $dx = \frac{4atdt}{(t^2 + 1)^2}$. Кроме того, $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2 + 1}$. Переходя к новой переменной под знаком интеграла, получаем при $|x| < a$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C. \square$$

Подстановки Эйлера, играя важную теоретическую роль, на практике часто приводят к громоздким выкладкам, поэтому к ним прибегают в крайних случаях, когда не удаётся более просто вычислить интеграл другим способом.

10.3 Интегрирование биномиальных дифференциалов

«Студентов можно условно поделить на три группы:

- учатся с удовольствием;*
- учатся без удовольствия;*
- не учатся с удовольствием.*

Задача преподавателя по отношению к этим группам:

- первых научить тому, что знаешь;*
- вторых научить необходимому,*
- но так, чтобы они этого не заметили;*
- а вот куда исчезают третьи, история умалчивает».*

Так называются дифференциалы вида $x^m(a + bx^n)^p dx$, где a, b – действительные числа, отличные от нуля, m, n, p – рациональные числа. Как доказал П.Л. Чебышёв,¹ первообразная для функции $x^m(a + bx^n)^p$ является элементарной функцией только в следующих трёх случаях:

- а) p – целое; б) $\frac{m+1}{n}$ – целое; в) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое.

Рассмотрим эти случаи.

- а) Если p – целое, то полагают $t = \sqrt[s]{x}$, где s – общий (натуральный) знаменатель дробей m и n .

Пример 157. Найти $\int \frac{\sqrt{x} dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^2}$.

Решение. Перепишем интеграл в виде $\int x^{\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{3}})^{-2} dx$. Очевидно, что $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -2$, $a = b = 1$. Положим $t = \sqrt[6]{x}$, тогда $x = t^6$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5 dt$, и в результате замены переменной интегрирования приходим к интегралу

$$6 \int \frac{t^8 dt}{(1 + t^2)^2} = 6 \int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2 + 3}{(1 + t^2)^2} \right) dt =$$

¹ *Чебышёв Пафнутий Львович* (1821–1894) – русский математик и механик, академик Петербургской АН. Окончил Московский университет. Является основателем Петербургской математической школы. Занимался теорией приближения функций многочленами, интегральным исчислением, теорией чисел, теорией вероятностей, теорией машин и механизмов и пр.

$$= 6 \int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{3(t^2 + 1) + t^2}{(1 + t^2)^2} \right) dt = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18 \operatorname{arctg} t - 6 \int \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^2},$$

$$\text{где } \int \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^2} = -\frac{1}{2} \int t d \left(\frac{1}{1 + t^2} \right) = -\frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C.$$

Следовательно, при $x \geq 0$ имеем

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{1 + t^2} - 21 \operatorname{arctg} t + C, \quad \text{где } t = \sqrt[6]{x}. \quad \square$$

б) Если $\frac{m+1}{n}$ – целое, то полагают $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$, где s – знаменатель дроби p .

Пример 158. Найти $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}$.

Решение. Перепишем интеграл в виде $\int x(1 + x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} dx$, откуда определяем $m = 1$, $n = \frac{2}{3}$, $p = -\frac{1}{2}$, $s = 2$. Так как $\frac{m+1}{n} = 3$ – целое, то положим $t = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}$. Тогда $x = (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$, $dx = \frac{3}{2}(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} 2t dt$. Следовательно,

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} = 3 \int (t^2 - 1)^2 dt = \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C, \quad \text{где } t = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}. \quad \square$$

в) Если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое, то рекомендуемая подстановка $t = \sqrt[s]{ax^{-n} + b}$, где s – знаменатель дроби p .

Пример 159. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$.

Решение. Приведём интеграл к виду $\int x^0(1 + x^4)^{-\frac{1}{4}} dx$ и определим $m = 0$, $n = 4$, $p = -\frac{1}{4}$, $s = 4$. Поскольку $\frac{m+1}{n} + p = 0$ – целое, то положим, следуя рекомендации, $t = \sqrt[4]{1 + x^{-4}}$. Тогда $x = (t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}$, $dx = -t^3(t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dt$, $\sqrt[4]{1 + x^4} = t(t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}} = - \int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \int \left(\frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t - 1} + \frac{Cx + D}{t^2 + 1} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t - 1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C,$$

где $t = \sqrt[4]{1 + x^{-4}}$. $\square$

10.4 Умножение на сопряжённое выражение, нестандартные подстановки и другие преобразования

«За всякое порученное дело должен отвечать один и только один человек».

Отто фон Бисмарк (1815–1898) – князь, политик,
государственный деятель, первый канцлер
Германской империи.

1) При интегрировании выражений, содержащих радикалы, иногда удобно использование известного приёма *домножения* (с одновременным делением) *на сопряжённое выражение*.

Пример 160. Найти $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$ ($a > 0$).

Решение. На ОДЗ имеем $-a \leq x < a$, и поэтому $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}$. Домножим и разделим подынтегральную дробь на выражение, сопряжённое знаменателю. В результате интеграл удаётся свести к сумме двух более простых интегралов:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= \int \frac{\sqrt{a+x} \cdot \sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x} \cdot \sqrt{a+x}} dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = a \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \\ &= a \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \int \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = a \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 161. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$ ($a \neq b$).

Решение. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое к знаменателю, т. е. на $\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}} &= \int \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}}{a-b} dx = \frac{1}{a-b} \left(\int \sqrt{x+a} dx - \int \sqrt{x+b} dx \right) = \\ &= \frac{1}{a-b} \left(\int \sqrt{x+a} d(x+a) - \int \sqrt{x+b} d(x+b) \right) = \\ &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{2}{3} (x+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (x+b)^{\frac{3}{2}} \right) + C \quad (x \geq -a, x \geq -b). \quad \square \end{aligned}$$

2) В следующем примере помогает простейший приём выделения полного квадрата в подкоренном выражении.

Пример 162. Найти $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$.

Решение. Если заметить, что под знаком квадратного корня находится полный квадрат, то это позволяет избавиться от радикала и тем самым существенно упростить вычисление интеграла:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx &= \int \frac{\sqrt{(x^2 + x^{-2})^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \ln |x| - \frac{1}{4x^4} + C \quad (x \neq 0). \quad \square\end{aligned}$$

3) Часто при интегрировании используются различные подстановки, в том числе нестандартные.

Пример 163. Найти $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2 + \sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2 + (1+x^2)\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Воспользуемся тем, что $\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2})$. Тогда имеем

$$\int \frac{d(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Положим $t = 1 + \sqrt{1+x^2}$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C. \quad \square$$

Пример 164. Найти $\int x \cdot \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx$ ($a > 0$).

Решение. Согласно ОДЗ, $\frac{x}{2a-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 2a)$. Сделаем тригонометрическую подстановку вида $x = 2a \sin^2 t$, где $t \in [0, \frac{\pi}{2})$. Приходим к интегралу

$$\begin{aligned}&\int (2a \sin^2 t) \cdot \sqrt{\frac{2a \sin^2 t}{2a - 2a \sin^2 t}} d(2a \sin^2 t) = 8a^2 \int \sin^4 t dt = \\ &= 8a^2 \int \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 dt = 8a^2 \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \cos^2 2t \right) dt = \\ &= 8a^2 \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t \right) dt = a^2 \left(3t - 2 \sin 2t + \frac{1}{4} \sin 4t \right) + C.\end{aligned}$$

Осталось сделать обратную подстановку. Очевидно,

$$\sin t = \sqrt{\frac{x}{2a}}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\frac{2a - x}{2a}},$$

тогда $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{2a - x}{2a}} = \frac{1}{a} \sqrt{x(2a - x)}$. Найдём $\cos 2t$: если $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ ($x \in [0, a)$), то $\cos 2t > 0$ и $\cos 2t = \sqrt{1 - \sin^2 2t} = \sqrt{1 - \frac{x(2a - x)}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{(a - x)^2} = \frac{|a - x|}{a} = \frac{a - x}{a}$. Если же $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $x \in [a, 2a)$, то $\cos 2t \leq 0$ и, следовательно, $\cos 2t = -\sqrt{1 - \sin^2 2t} = -\frac{1}{a} \sqrt{(a - x)^2} = -\frac{|a - x|}{a} = \frac{a - x}{a}$. Таким образом, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos 2t = \frac{a - x}{a}$. Поэтому $\sin 4t = 2 \sin 2t \cos 2t = \frac{2}{a} \sqrt{x(2a - x)} \cdot \frac{a - x}{a}$. Подставляя, получим для исходного интеграла:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sqrt{\frac{x}{2a - x}} dx &= a^2 \left(3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{2}{a} \sqrt{x(2a - x)} + \frac{1}{2a} \sqrt{x(2a - x)} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right) + C = \\ &= 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a + x}{2} \sqrt{x(2a - x)} + C. \quad \square \end{aligned}$$

И помните, что в теме неопределённых интегралов есть приятный «бонус»: результат вычисления всегда можно проверить дифференцированием.

Улыбнёмся шутке в заключение семинара:

«Новая акция деканата: собери три "хвоста" и ты можешь совершенно бесплатно обменять их на новые кирзовые сапоги».

Студенческий анекдот прошлого века.

10.5 Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы, упрощая их и сводя к табличным:

$$\text{№481. } \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 3}};$$

$$\text{№482. } \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 2x - x^2}};$$

$$\text{№483. } \int \frac{x dx}{\sqrt{8 + 8x - 4x^2}};$$

$$\text{№484. } \int \frac{2x - 1}{\sqrt{1 - 6x - x^2}} dx;$$

$$\text{№485. } \int \frac{(3x + 1)dx}{\sqrt{2x^2 + 4x - 1}};$$

$$\text{№486. } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 - 4x)^2}};$$

$$\text{№487. } \int \frac{1 - x}{\sqrt{x^6}} dx.$$

Вычислить интегралы с дробно-линейными иррациональностями, используя соответствующие рационализирующие подстановки:

$$\text{№488. } [7, \text{ № 1926}] \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}};$$

$$\text{№489. } \int \frac{\sqrt{x} + 1}{x^2 - \sqrt{x}} dx;$$

$$\text{№490. } \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$$

$$\text{№491. } [7, \text{ № 1927}] \int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})};$$

$$\text{№492. } \int \frac{dx}{x\sqrt{2x + 1}};$$

$$\text{№493. } \int \frac{\sqrt{x + 1} + 2}{x^2 + 1 - \sqrt{x + 1} + 2x} dx;$$

$$\text{№494. } [7, \text{ № 1930}] \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 \cdot \sqrt{x}};$$

$$\text{№495. } \int \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} dx.$$

Указание: положить $t = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$.

$$\text{№496. } \int \sqrt[3]{\frac{2 - x}{2 + x}} \cdot \frac{dx}{(2 - x)^2};$$

$$\text{№497. } [7, \text{ № 1932}] \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x + 1)^2(x - 1)^4}}.$$

Указание: положить $t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$.

$$\text{№498. } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$$

Вычислить интегралы, используя подходящие рационализирующие подстановки:

$$\text{№499. } \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx \quad (a > 0).$$

Указание: положить $x = a \sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{№500. } \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx.$$

Указание: положить $x = \operatorname{tg} t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{№501. } \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} dx \quad (a > 0).$$

Указание: положить $x = a \operatorname{tg} t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{№502. } \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9+x^2}};$$

$$\text{№503. } \int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6} dx.$$

Указание: положить $x = 3 \sin t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{№504. } \int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx.$$

Указание: положить $x = \frac{4}{\cos t}$, где $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

$$\text{№505. } \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2 + 2} dx.$$

Указание: положить $x = \operatorname{sh} t$, где $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{№506. } \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Указание: после выделения полного квадрата положить $t = x + 1$, а затем $t = \operatorname{tg} z$, $z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

№507. [7, № 1779] Найти максимальное количество различных способов вычисления (подстановок и проч.) интеграла

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}}.$$

Найти интеграл некоторыми из этих способов (наиболее эффективными для данного интеграла).

$$\text{№508. [7, № 1935]} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}.$$

Указание: положить $t = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}$.

№509. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}};$

Указание: положить $t = 1/x$.

№510. $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}};$

№511. [7, № 1938] $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

Указание. Сделать подстановку $t = \frac{1}{x+1}$. Есть ли другой способ вычисления интеграла?

№512. [7, № 1939] $\int \frac{dx}{(1-x)^2 \cdot \sqrt{1-x^2}};$

№513. $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \cdot \sqrt{x^2+3x+1}}.$

Указание: положить $t = \frac{1}{x-1}$.

№514. $\int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx.$

№515. [7, № 1943] Применяя формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{y} dx = Q_{n-1}(x) \cdot y + \lambda \int \frac{dx}{y},$$

где $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ – многочлен степени n , $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n-1)$ и λ – число, найти интеграл

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$$

№516. [7, № 1955] Найти $\int \frac{P(x)}{Q(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, разлагая рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби:

$$\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$$

№517. [7, № 1960] Найти $\int \frac{P(x)}{Q(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, разлагая рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx.$$

№518. [7, № 1961] $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x - 1}}.$

Указание: положить $t = x + \frac{1}{2}.$

№519. $\int \frac{x+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} dx.$

№520. [7, № 1966] Применяя подстановки Эйлера:

1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a} \cdot x + t$, если $a > 0$;

2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$,

найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

№521. [7, № 1967] Применяя подстановки Эйлера, найти интеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

№522. [7, № 1974] $\int \frac{x + \sqrt{1 + x + x^2}}{1 + x + \sqrt{1 + x + x^2}} dx;$

№523. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} dx.$

Найти интегралы от дифференциальных биномов:

№524. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx;$

№525. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}};$

№526. $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^3-1}};$

№527. $\int \sqrt[3]{x-x^3} dx;$

№528. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x-x^2}}.$

10.6 Ответы и решения

481. Сведём к табличному интегралу под названием «длинный логарифм»:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 3}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\sqrt{(3x)^2 + 3}} = \frac{1}{3} \ln \left| 3x + \sqrt{9x^2 + 3} \right| + C.$$

482. Выделяя полный квадрат под корнем, сводим к табличному интегралу:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 2x - x^2}} = \int \frac{d(x - 1)}{\sqrt{3 - (x - 1)^2}} = \arcsin \frac{x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

483. Выделим полный квадрат и положим $t = x - 1$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{8 + 8x - 4x^2}} &= \int \frac{x dx}{\sqrt{12 - 4(x - 1)^2}} = \int \frac{(t + 1)dt}{\sqrt{12 - 4t^2}} = \\ &= \int \frac{t dt}{\sqrt{12 - 4t^2}} + \int \frac{dt}{\sqrt{12 - 4t^2}} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Найдём I_1 , сделав подстановку $z = 12 - 4t^2$:

$$\int \frac{t dt}{\sqrt{12 - 4t^2}} = -\frac{1}{8} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{4} \sqrt{z} + C = -\frac{1}{4} \sqrt{12 - 4t^2} + C.$$

Второй интеграл I_2 легко сводится к табличному:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{12 - 4t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(\sqrt{3})^2 - t^2} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

484. Выделим полный квадрат $1 - 6x - x^2 = 10 - (x + 3)^2$ и введём переменную $t = x + 3$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 1}{\sqrt{1 - 6x - x^2}} dx &= \int \frac{2t - 7}{\sqrt{10 - t^2}} dt = \int \frac{2tdt}{\sqrt{10 - t^2}} - 7 \int \frac{dt}{\sqrt{10 - t^2}} = \\ &= - \int \frac{d(10 - t^2)}{\sqrt{10 - t^2}} - 7 \arcsin \frac{t}{\sqrt{10}} + C = -\sqrt{10 - t^2} - 7 \arcsin \frac{t}{\sqrt{10}} + C = \\ &= -\sqrt{1 - 6x - x^2} - 7 \arcsin \frac{x + 3}{\sqrt{10}} + C, \quad \text{где } |x + 3| < \sqrt{10}. \end{aligned}$$

485. Выделяя полный квадрат под корнем, разбиваем на два интеграла:

$$\int \frac{(3x + 1)dx}{\sqrt{2x^2 + 4x - 1}} = \int \frac{(3(x + 1) - 2)dx}{\sqrt{2(x + 1)^2 - 3}} = 3 \int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{2(x + 1)^2 - 3}} -$$

$$\begin{aligned}
-2 \int \frac{dx}{\sqrt{2(x+1)^2 - 3}} &= \frac{3}{4} \int \frac{d(2(x+1)^2 - 3)}{\sqrt{2(x+1)^2 - 3}} - \sqrt{2} \int \frac{d(\sqrt{2}(x+1))}{\sqrt{2(x+1)^2 - 3}} = \\
&= \frac{3}{2} \sqrt{2(x+1)^2 - 3} - \sqrt{2} \ln \left| \sqrt{2}(x+1) + \sqrt{2(x+1)^2 - 3} \right| + C.
\end{aligned}$$

486. Сделаем подстановку $t = 3 - 4x$, тогда $x = \frac{3-t}{4}$, $dx = -\frac{dt}{4}$ ($x \neq \frac{3}{4}$) и приходим к табличному интегралу

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{4} \int t^{-\frac{2}{3}} dt = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{t} + C = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{3-4x} + C,$$

«Продвинутые» люди вычисляют данный интеграл иначе – методом подведения функции под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = \int (3-4x)^{-\frac{2}{3}} dx = -\frac{1}{4} \int (3-4x)^{-\frac{2}{3}} d(3-4x) = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{3-4x} + C.$$

Но такое решение очевидно далеко не для всех студентов. Кроме того, использование «быстрого» способа значительно повышает риск допустить ошибку. Образно говоря, это плата за экономию времени. Как поступать в том или ином случае – решать вам.

487. При $x \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-x}{\sqrt{x^6}} dx &= \int \frac{dx}{|x^3|} - \int \frac{xdx}{|x^3|} = \operatorname{sgn} x \int \frac{dx}{x^3} - \operatorname{sgn} x \int \frac{dx}{x^2} = \\
&= \operatorname{sgn} x \left(-\frac{1}{2x^2} \right) - \operatorname{sgn} x \left(-\frac{1}{x} \right) + C = -\frac{1}{2x|x|} + \frac{1}{|x|} + C = \\
&= -\frac{1}{2x\sqrt{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2}} + C = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \left(1 - \frac{1}{2x} \right) + C.
\end{aligned}$$

488. Сделаем рационализирующую подстановку $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, $dx = 2tdt$ и при $x \geq 0$ приходим к интегралу

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= 2 \int \frac{tdt}{1+t} = 2 \int \frac{((t+1) - 1)dt}{1+t} = 2(t - \ln|t+1|) + C = \\
&= 2(\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)) + C.
\end{aligned}$$

489. Положим $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, $dx = 2tdt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}} dx = \int \frac{t+1}{t^4-t} \cdot 2tdt = 2 \int \frac{t+1}{t^3-1} dt.$$

Раскладывая рациональную функцию под знаком интеграла в сумму простейших дробей, получим

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{t+1}{t^3-1} dt &= \frac{4}{3} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{2}{3} \int \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt = \frac{4}{3} \ln|t-1| - \frac{2}{3} \ln|t^2+t+1| + C = \\ &= \frac{2}{3} \ln \frac{t^2-2t+1}{t^2+t+1} + C = \frac{2}{3} \ln \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + C. \end{aligned}$$

490. Положим $t = \sqrt[4]{x}$, тогда $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$ и при $x > 0$ получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} &= 4 \int \frac{t^3 dt}{t^2+t} = 4 \int \frac{t^2 dt}{t+1} = 4 \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= 4 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) + C = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x}+1) + C. \end{aligned}$$

491. Сделаем рационализирующую подстановку $t = \sqrt[6]{x}$, тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$ и приходим к интегралу ($x > 0$)

$$\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = 6 \int \frac{dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = 6 \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1} \right) dt.$$

Методом неопределённых коэффициентов находим $A = 1$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = -\frac{3}{2}$, $D = \frac{1}{4}$ и т. д. Ответ: $\frac{3}{4} \ln \frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C$.

492. Положим $t = \sqrt{2x+1}$ ($t > 0$), тогда $x = \frac{t^2-1}{2}$, $dx = t dt$ и получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} = 2 \int \frac{dt}{t^2-1} = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right| + C.$$

493. Перепишем интеграл в виде

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx$$

и сделаем подстановку $t = \sqrt{x+1}$. Тогда $x = t^2-1$, $dx = 2t dt$ и приходим к интегралу, вычисляемому разложением подынтегральной функции на сумму элементарных дробей:

$$\int \frac{t+2}{t^4-t} \cdot 2t dt = \dots = \int \left(-\frac{2}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{t}{t^2+t+1} \right) dt \quad \text{и т. д.}$$

494. Сделаем рационализирующую подстановку $t = \sqrt[4]{x}$, тогда $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 \cdot \sqrt{x}} = 4 \int \frac{t dt}{(1 + t)^3} =$$

(сделаем ещё одну замену $u = t + 1$)

$$= 4 \int \frac{(u-1)}{u^3} du = -\frac{4}{u} + \frac{2}{u^2} + C = -\frac{4}{1 + \sqrt[4]{x}} + \frac{2}{(1 + \sqrt[4]{x})^2} + C, \quad x > 0.$$

495. Положим $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, тогда $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$, $dx = -\frac{4t dt}{(t^2-1)^2}$ и приходим к интегралу

$$I = \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = -4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^2}.$$

Из разложения $\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t-1)^2} + \frac{D}{(t+1)^2}$ находим коэффициенты $A = -B = -\frac{1}{4}$, $C = D = \frac{1}{4}$. Тогда

$$I = \ln|t-1| - \ln|t+1| + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} + C, \quad \text{где } t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad |x| > 1.$$

496. Под знаком интеграла видим дробно-линейную иррациональность $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$. Согласно рекомендации применим подстановку $t = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$, тогда $x = \frac{2(1-t^3)}{1+t^3}$, $2-x = \frac{4t^3}{1+t^3}$, $dx = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2} dt$. Подставляя в интеграл, получим (при $x \neq \pm 2$)

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2} = -\frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8t^2} + C = \frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C.$$

497. Перепишем интеграл в виде

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}$$

и сделаем рационализирующую подстановку $t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$. Тогда $x = \frac{t^3+1}{1-t^3}$, $dx = \frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2}$, $x+1 = \frac{2}{1-t^3}$, $x-1 = \frac{2t^3}{1-t^3}$ и приходим к интегралу

$$I = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{3}{2t} + C = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C, \quad x \neq \pm 1.$$

498. Преобразуем подынтегральную функцию к виду $\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \frac{1}{(x+2)^2} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3}$ и сделаем замену $t = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$. Тогда $x = \frac{t^4+2}{t^4-1}$, $dx = \frac{-12t^3}{(t^4-1)^2} dt$ и при $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} &= \int \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3} \cdot \frac{dx}{(x+2)^2} = \int t^3 \cdot \frac{(t^4-1)^2}{9t^8} \cdot \frac{-12t^3}{(t^4-1)^2} dt = \\ &= -\frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C. \end{aligned}$$

499. Положим $x = a \sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, тогда $dx = a \cos t dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$ и интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx &= a \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = a \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \sin t dt = -a \int \frac{\cos^2 t}{1 - \cos^2 t} d(\cos t) = \\ &= a \int \frac{\cos^2 t - 1 + 1}{\cos^2 t - 1} d(\cos t) = a \int d(\cos t) + a \int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t - 1} = \\ &= a \cos t + \frac{a}{2} \ln \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} + C = \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a}{2} \ln \frac{(1 - \cos t)^2}{(1 + \cos t)(1 - \cos t)} + C = \\ &= \sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \left| \frac{1 - \cos t}{\sin t} \right| + C = \sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \left| \frac{a - a \cos t}{a \sin t} \right| + C = \\ &= \sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + C \quad (0 < |x| \leq a). \end{aligned}$$

500. Положив $x = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тогда $t = \operatorname{arctg} x$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ и при $x \neq 0$ приходим к интегралу

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx &= \int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\operatorname{tg}^4 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin^4 t}{\cos^4 t}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \\ &= \int \frac{\cos t}{\sin^4 t} dt = \int \frac{d(\sin t)}{\sin^4 t} = -\frac{1}{3 \sin^3 t} + C = -\frac{1}{3 \sin^3(\operatorname{arctg} x)} + C. \end{aligned}$$

501. Положим $x = a \operatorname{tg} t$, тогда $dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}$, $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} = \int \frac{(a \operatorname{tg} t)^2 \frac{a dt}{\cos^2 t}}{\sqrt{((a \operatorname{tg} t)^2 + a^2)^3}} = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{dt}{\cos t} - \int \cos t dt = \int \frac{d(t + \frac{\pi}{2})}{\sin(t + \frac{\pi}{2})} - \sin t = \\
&= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin t + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) + C = \\
&= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C.
\end{aligned}$$

502. Сделаем подстановку $x = 3 \operatorname{tg} t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тогда $dx = \frac{3dt}{\cos^2 t}$, $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9 + x^2}} = \frac{1}{9} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{9 \sin t} + C = -\frac{1}{9 \sin(\operatorname{arctg} \frac{x}{3})} + C.$$

503. Сделаем тригонометрическую подстановку $x = 3 \sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тогда $dx = 3 \cos t dt$, $t = \arcsin \frac{x}{3}$ и приходим к интегралу

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{(9 - x^2)^3}}{x^6} dx &= \int \frac{\sqrt{(9 \cos^2 t)^3}}{(3 \sin t)^6} \cdot 3 \cos t dt = \frac{1}{9} \int \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t} \cdot \frac{dt}{\sin^2 t} = \\
&= -\frac{1}{9} \int \operatorname{ctg}^4 t d(\operatorname{ctg} t) = -\frac{1}{9} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^5 t}{5} + C = -\frac{1}{45} \operatorname{ctg} \left(\arcsin \frac{x}{3} \right) + C.
\end{aligned}$$

504. Сделаем рекомендованную подстановку $x = \frac{4}{\cos t}$, тогда $dx = \frac{4 \sin t}{\cos^2 t} dt$, $x^2 - 16 = 16 \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$, $t = \arccos \frac{4}{x}$ и приходим к интегралу

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx &= 4 \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = 4 \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} dt = \\
&= 4 \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = 4(\operatorname{tg} t - t) + C = 4 \operatorname{tg} \left(\arccos \frac{4}{x} \right) - 4 \arccos \frac{4}{x} + C.
\end{aligned}$$

505. Сделаем подстановку $x = \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$, тогда $\sqrt{1 + x^2} = \operatorname{ch} t$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2 + 2} dx &= \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t + 2} \cdot \operatorname{ch} t dt = \int \frac{\operatorname{sh}^2 t + 1}{\operatorname{sh}^2 t + 2} dt = \int \frac{(\operatorname{sh}^2 t + 2) - 1}{\operatorname{sh}^2 t + 2} dt = \\
&= \int dt - \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t + 2(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t)} = t - \int \frac{dt}{2 \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t} = \\
&= t - \int \frac{1}{2 - \operatorname{th}^2 t} \cdot \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = t - \int \frac{d(\operatorname{th} t)}{2 - \operatorname{th}^2 t} = t + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \operatorname{th} t}{\sqrt{2} + \operatorname{th} t} + C =
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{arsh} x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t}{\sqrt{2} \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t} + C = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(x^2 + 1)} - x}{\sqrt{2(x^2 + 1)} + x} + C.$$

506. Обозначив $t = x + 1$, приходим к интегралу

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} &= \int \frac{dt}{t - 1 + \sqrt{t^2 + 1}} = \\ &= - \int \frac{t - 1 - \sqrt{t^2 + 1}}{2t} dt = -\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \ln |t| + \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} dt. \end{aligned}$$

После замены $t = \operatorname{tg} z$, $z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} dt &= \int \frac{dz}{\cos^2 z \sin z} = - \int \frac{d(\cos z)}{(1 - \cos^2 z) \cos^2 z} = \\ &= - \int \left(\frac{1}{\cos^2 z} + \frac{1}{1 - \cos^2 z} \right) d(\cos z) = \frac{1}{\cos z} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos z}{1 - \cos z} \right| + C = \\ &= \sqrt{1 + t^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{t^2 + 1}}{1 - \sqrt{t^2 + 1}} \right| + C = \sqrt{1 + t^2} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{t^2 + 1}}{t} \right| + C = \\ &= \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

507. 1-й способ. Сделаем замену $t = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$, тогда $t^2 = \frac{x^2}{x^2 - 2} \Rightarrow x^2 = \frac{2t^2}{t^2 - 1}$, $xdx = \frac{-2tdt}{(t^2 - 1)^2}$ и получаем интеграл

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} \cdot xdx = \int \frac{-2t^2 dt}{(t^2 - 1)^2} = -2 \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{(t^2 - 1)^2} dt = \\ &= -2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} - 2 \int \frac{dt}{(t - 1)^2(t + 1)^2} = -2I_1 - 2I_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{где } I_1 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C_1, \quad I_2 = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{t - 1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t - 1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{t + 1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t + 1)^2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\ln |t - 1| - \frac{1}{t - 1} + \ln |t + 1| - \frac{1}{t + 1} \right) + C. \end{aligned}$$

$$I = \ln \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + \frac{2}{t - 1} + \frac{2}{t + 1} + C, \quad \text{где } t = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}.$$

2-й способ. Интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} &= \int x d(\sqrt{x^2 - 2}) = x\sqrt{x^2 - 2} - \int \sqrt{x^2 - 2} dx = \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 2} + \ln|x + \sqrt{x^2 - 2}| + C.\end{aligned}$$

3-й способ. Имеем

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^2 - 2) + 2}{\sqrt{x^2 - 2}} dx &= \int \sqrt{x^2 - 2} dx + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 2} + \ln|x + \sqrt{x^2 - 2}| + C.\end{aligned}$$

4-й способ. По правилу интегрирования биномиального дифференциала $x^m(a + bx^n)^p dx$, получаем

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \int x^2(x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

где $m = n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, при этом $\frac{m+1}{n} + p$ — целое. Подстановка $t = \sqrt{\frac{x^2 - 2}{x^2}}$ приводит к интегралу $2 \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2}$.

5-й способ. 1-я подстановка Эйлера ($a = 1 > 0$): $\sqrt{x^2 - 2} = t - x$. Тогда $x = \frac{t^2 + 2}{2t}$, $dx = \frac{t^2 - 2}{2t^2} dt$, $\sqrt{x^2 - 2} = \frac{t^2 - 2}{2t}$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \int \frac{(\frac{t^2+2}{2t})^2}{\frac{t^2-2}{2t}} \cdot \frac{t^2-2}{2t^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{(t^2 + 2)^2}{t^3} dt, \quad \text{где } t = \sqrt{x^2 - 2} + x.$$

6-й способ. 3-я подстановка Эйлера (имеются действительные корни): $\sqrt{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})} = t(x - \sqrt{2})$.

7-й способ. По формуле

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = (Ax + B)\sqrt{x^2 - 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}}, \quad \text{где } A = \frac{1}{2}, B = 0, \lambda = 1.$$

8-й способ. Гиперболическая подстановка $x = \sqrt{2} \operatorname{ch} t$, $t > 0$ при $x > \sqrt{2}$ (и подстановка $x = -\sqrt{2} \operatorname{ch} t$, $t > 0$ при $x < -\sqrt{2}$). Так, в первом случае $dx = \sqrt{2} \operatorname{sh} t dt$ и получаем (с учётом $\sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{sh} t$)

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \int \frac{2 \operatorname{ch}^2 t \cdot \sqrt{2} \operatorname{sh} t dt}{\sqrt{2(\operatorname{ch}^2 t - 1)}} = \int 2 \operatorname{ch}^2 t dt = \int (\operatorname{ch} 2t + 1) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t + t + C = \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + t + C, \text{ где } \operatorname{ch} t = \frac{x}{\sqrt{2}}, \operatorname{sh} t = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{2}}, e^t = \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t = \frac{\sqrt{x^2 - 2} + x}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \ln \frac{\sqrt{x^2 - 2} + x}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 2} + \ln |\sqrt{x^2 - 2} + x| + C.$$

(мы поставили модуль под знаком логарифма, хотя могли оставить скобки в силу положительности выражения $\sqrt{x^2 - 2} + x$ при $x > \sqrt{2}$). Аналогично вычисляется интеграл в случае $x < -\sqrt{2}$.

9-й способ. Перепишем интеграл в виде $\int \sqrt{\frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}} \cdot \frac{x^2 dx}{x + \sqrt{2}}$, сделаем подстановку $t = \sqrt{\frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}}$ (дробно-линейная иррациональность) и получим

$$-4 \int \frac{(t^2 + 1)^2}{(t^2 - 1)^3} dt = \ln \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| + \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{t - 1} + \frac{1}{(t - 1)^2} - \frac{1}{(t + 1)^2} + C \text{ и т. д.}$$

10-й способ. Тригонометрические подстановки $x = \frac{\sqrt{2}}{\sin t}$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, или $x = \frac{\sqrt{2}}{\cos t}$, где $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Так, в случае $x > \sqrt{2}$ сделаем подстановку $x = \frac{\sqrt{2}}{\sin t}$, где $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, тогда $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{x}$, $\sin^2 t = \frac{2}{x^2}$, $\cos^2 t = \frac{x^2 - 2}{x^2}$, $\cos t = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x}$, $dx = -\frac{\sqrt{2} \cos t}{\sin^2 t} dt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = -2 \int \frac{dt}{\sin^3 t}.$$

На следующем семинаре будет показано, что $\int \frac{dt}{\sin^3 t} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right| - \frac{\cos t}{2 \sin^2 t} + C$. Используя это, получаем, что искомый интеграл равен $-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - \sqrt{x^2 - 2}}{x + \sqrt{x^2 - 2}} \right| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 2} + C$, что после преобразований совпадает с выражением $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 2} + \ln |\sqrt{x^2 - 2} + x| + C$.

508. Положим $t = \sqrt{x} + \sqrt{x + 1}$, тогда $x = \left(\frac{t^2 - 1}{2t}\right)^2$. Переходя к новой переменной, получим ($x \geq 0$)

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x + 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t^3} dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t^2} + C =$$

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + x} + C.$$

509. Преобразуем подынтегральное выражение ($x > 0$):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = - \int \frac{d(\frac{1}{x})}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}} = - \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right| + C.$$

510. Положим $t = \frac{1}{x}$, тогда $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, и при $t > 0$ получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}} &= - \int \frac{t^3 dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} = - \int \frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \\ &= - \int \sqrt{t^2+1} dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = - \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} - \frac{1}{2} \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C = \\ &= - \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C, \quad \text{где } t = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

511. Достаточно рассмотреть случай $x+1 > 0$. Сделаем подстановку $t = \frac{1}{x+1}$, тогда $x = -1 + \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$ и приходим к интегралу

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} &= - \int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t} \sqrt{(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 1) + (\frac{1}{t} - 1) + 1}} = \\ &= - \int \frac{d(t - \frac{1}{2})}{\sqrt{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} = - \ln \left| \left(t - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} \right| + C = \\ &= - \ln \left(\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} \right) + C. \end{aligned}$$

Можно было решать задачу, например, с помощью 1-й подстановки Эйлера $\sqrt{x^2+x+1} = t-x$, тогда интеграл приводится к виду $\int \frac{2dt}{t(t+2)}$.

512. Положим $t = \frac{1}{1-x}$ (> 0 на ОДЗ), тогда $x = 1 - \frac{1}{t}$, $dx = \frac{dt}{t^2}$ и получаем

$$\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2}} = \int \frac{t dt}{\sqrt{2t-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{t dt}{\sqrt{t - \frac{1}{2}}} =$$

$$\begin{aligned}
(\text{пусть } u = \sqrt{t - \frac{1}{2}}, t = u^2 + \frac{1}{2}) \quad &= \sqrt{2} \int \left(\frac{1}{2} + u^2 \right) du = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}u + \frac{u^3}{3} \right) + C = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}} \right)^3 + C = \dots = \frac{2-x}{3(1-x)^2} \sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}$$

513. Положим $t = \frac{1}{x-1}$, тогда $x = 1 + \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$ и в результате перехода к новой переменной приходим при $t > 0$ к интегралу $I = -\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}}$. Далее воспользуемся формулой (1):

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} = (At + B)\sqrt{5t^2 + 5t + 1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}}.$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$\frac{t^2}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} = A\sqrt{5t^2 + 5t + 1} + \frac{(At + B)(10t + 5)}{2\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}}.$$

Умножим полученное тождество на $2\sqrt{5t^2 + 5t + 1}$:

$$2t^2 = t^2(20A) + t(15A + 10B) + (2A + 5B + 2\lambda).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем систему

$$\begin{aligned}
x^2: \quad &2 = 20A, \\
x^1: \quad &0 = 15A + 10B, \\
x^0: \quad &0 = 2A + 5B + 2\lambda,
\end{aligned}$$

откуда находим $A = \frac{1}{10}$, $B = -\frac{3}{20}$, $\lambda = \frac{11}{40}$. Далее,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + \frac{1}{5}} \right| + C.$$

Окончательно при $t = \frac{1}{x-1}$ имеем

$$I = -\left(\frac{t}{10} - \frac{3}{10} \right) \sqrt{5t^2 + 5t + 1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + \frac{1}{5}} \right| + C,$$

$$I = \frac{3x-5}{20(x-1)^2} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{5} + 2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}{x-1} \right| + C \quad (x > 1).$$

514. Разобьём интеграл на сумму двух интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} &= \int \frac{(3(x+1)-1)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = \\ &= 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = 3 \cdot I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Вычислим каждый из интегралов I_1 и I_2 . Первый интеграл табличный:

$I_1 = \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2+3x+3} \right| + C_1$. В интеграле I_2 положим $t = \frac{1}{x+1}$ ($t > 0$):

$$I_2 = \int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + 3\left(\frac{1}{t}-1\right) + 3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1} \right| + C_2.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} &= 3 \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2+3x+3} \right| + \\ &+ \ln \left| \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + 1} \right| + C \quad (x+1 > 0). \end{aligned}$$

515. Согласно методу, запишем формулу

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Продифференцируем это равенство:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2} + \frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Умножим обе части на $\sqrt{1+2x-x^2}$:

$$x^3 \equiv (2ax+b)(1+2x-x^2) + (1-x)(ax^2+bx+c) + \lambda.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства (для этого многочлены предварительно приводятся к стандартному виду), приходим к системе

$$\begin{aligned} x^3: \quad & 1 = -3a, \\ x^2: \quad & 0 = 5a - 2b, \\ x^1: \quad & 0 = 2a + 3b - c, \end{aligned}$$

$x^0: 0 = b + c + \lambda$,
откуда находим $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{5}{6}$, $c = -\frac{19}{6}$, $\lambda = 4$. Подставим в формулу:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx &= \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}\right) \sqrt{1+2x-x^2} + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} + C = \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}\right) \sqrt{1+2x-x^2} + 4 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

516. Имеем

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^3+1)-1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} dx &= \int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx - \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} = \\ &= I_1 - I_2. \text{ Найдём } I_1:\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx = (ax+b)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Дифференцируя и умножая затем на $\sqrt{1+2x-x^2}$, получим

$$x^2 - x + 1 \equiv a(1+2x-x^2) + (ax+b)(-x+1) + \lambda,$$

откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем

$$\begin{aligned}x^2: 1 &= -2a, \\ x^1: -1 &= 3a - b, \\ x^0: 1 &= a + b + \lambda,\end{aligned}$$

откуда находим $a = b = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 2$. Подставляя в интеграл, получаем

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx &= -\frac{1+x}{2} \sqrt{1+2x-x^2} + 2 \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = \\ &= -\frac{1+x}{2} \sqrt{1+2x-x^2} + \int \frac{d\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = -\frac{1+x}{2} \sqrt{1+2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

Найдём I_2 :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} &= (\text{подстановка } t = \frac{1}{x+1}, x = \frac{1}{t} - 1) \\ &= - \int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t} \sqrt{1+2(\frac{1}{t}-1)-(\frac{1}{t}-1)^2}} = - \int \frac{\operatorname{sgn} t dt}{\sqrt{1-2(t-1)^2}} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\text{подстановка } z = \sqrt{2}(t-1)) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\operatorname{sgn} t \, dz}{\sqrt{1-z^2}} = \dots = \\
& = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \arcsin(\sqrt{2}(t-1)) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{|1+x|} + C.
\end{aligned}$$

517. Преобразуем подынтегральную функцию к виду

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} = \frac{x^2+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}.$$

Тогда интеграл разбивается на два интеграла:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = \ln|x + \sqrt{x^2+2}| + C_1$. Для вычисления I_2 сделаем подстановку $t = (\sqrt{x^2+2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Тогда $t^2 = \frac{x^2}{x^2+2}$, $x^2 = \frac{2t^2}{1-t^2} \Rightarrow xdx = \frac{2tdt}{(1-t^2)^2}$ и получаем

$$\int \frac{x \cdot x \, dx}{x^2(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C_2 = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C_2.$$

Следовательно, $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+2}| + \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C$.

518. Выделяя полный квадрат и полагая $t = x + \frac{1}{2}$, получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{dt}{(t^2+\frac{3}{4})\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}} =$$

(подстановка $z = \frac{t}{\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}}$, тогда $t^2 = \frac{5z^2}{4(z^2-1)}$, $tdt = -\frac{5zdz}{4(z^2-1)^2}$. Тогда при

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| > \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ получаем интеграл) } = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\frac{3}{8} - z^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}z}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}z} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3(x^2+x-1)} + \sqrt{2}(2x+1)}{\sqrt{3(x^2+x-1)} - \sqrt{2}(2x+1)} \right| + C.$$

519. Разобьём интеграл на два интеграла:

$$\int \frac{x+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} dx = \int \frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} + 2 \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = I_1 + I_2.$$

Положив в первом из интегралов $u = x^2$, а затем $z = \sqrt{u+2}$, получим

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u+1)\sqrt{u+2}} = \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1} \right| + C.$$

Для вычисления второго интеграла положим $t = (\sqrt{x^2+2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Тогда

$$x^2 = \frac{2t^2}{1-t^2}, \quad x^2+1 = \frac{t^2+1}{1-t^2}, \quad xdx = \frac{2tdt}{(1-t^2)^2} \text{ и, подставляя в интеграл, получим}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{2dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{2x(xdx)}{x^2(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{2t \cdot \frac{2tdt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2t^2}{1-t^2} \cdot \frac{t^2+1}{1-t^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C. \end{aligned}$$

520. Так как $a = 1 > 0$, то воспользуемся 1-й подстановкой Эйлера: $\sqrt{x^2+x+1} = t-x$, тогда $x^2+x+1 = (t-x)^2$, $x = \frac{t^2-1}{1+2t}$, $dx = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2} dt$ и интеграл примет вид

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2 t} dt = 2 \int \left(\frac{A}{(1+2t)^2} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{t} \right) dt = \\ &= 2 \int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{(1+2t)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{1+2t} + \frac{1}{t} \right) dt = \dots = \frac{3}{2(2t+1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|2t+1|^3} + C, \end{aligned}$$

где $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$, $x \neq -1$.

521. Так как $c = 1 > 0$, то применим 2-ю подстановку Эйлера: $\sqrt{1-2x-x^2} = xt-1$, тогда $1-2x-x^2 = (xt-1)^2$. Упрощая и сокращая на $x \neq 0$, выражаем $x = \frac{2(t-1)}{t^2+1}$, $dx = 2 \frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2} dt$ и получаем

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)} dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на элементарные дроби:

$$\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

откуда приходим к системе

$$\begin{aligned} t^3: \quad & 0 = A + B + C, \\ t^2: \quad & -1 = -A - C + D, \\ t^1: \quad & 2 = A + B - D, \end{aligned}$$

$$t^0: 1 = -A.$$

Решая систему, находим $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = -2$. Подставляя в интеграл, получаем

$$I = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| - 2 \operatorname{arctg} t + C, \quad t = \frac{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}{x}.$$

522. Разобьём интеграл на два интеграла

$$I = \int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}} dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}.$$

Выполним 1-ю подстановку Эйлера $t = x + \sqrt{1+x+x^2}$, тогда $1+x+x^2 = (x-t)^2$, $x = \frac{t^2-1}{2t+1}$, $dx = \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2} dt$ и приходим к интегралу

$$\begin{aligned} I &= x - 2 \int \frac{t^2+t+1}{(1+t)(2t+1)^2} dt = \dots = \\ &= \sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2} + C. \end{aligned}$$

523. Применим 3-ю подстановку Эйлера: $\sqrt{x^2+2x} = xt$. После возведения в квадрат и сокращения на x получаем $x = \frac{2}{t^2-1}$, $dx = -\frac{4tdt}{(t^2-1)^2}$, $x+1 = \frac{1+t^2}{t^2-1}$, $(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x} = x^2t^2 \cdot xt = x^3t^3 = \frac{8t^3}{(t^2-1)^3}$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{t^2+1}{t^2} dt = -\frac{1}{2} \int dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \\ &= -\frac{t}{2} + \frac{1}{2t} + C = -\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+2x}} + C = -\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} + C. \end{aligned}$$

524. Преобразуем интеграл к виду

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} (1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx.$$

Здесь $p = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$, поэтому применим подстановку $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$. Отсюда $x = (t^3-1)^4$, $dx = 4 \cdot (t^3-1)^3 \cdot 3t^2 dt$, и в результате приходим к интегралу

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = 12 \int t^3(t^3-1) dt = \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C =$$

$$= \frac{12}{7} \sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^7} - 3 \sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^4} + C, \quad x > 0.$$

525. Преобразуем интеграл к виду $\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$. Здесь $p = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, $m = -2$, $n = 2$, $\frac{m+1}{n} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} + p = -2 \in \mathbb{Z}$. Поэтому сделаем подстановку $t = \sqrt{x^{-2}+1}$, тогда $x = (t^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, $dx = -(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}tdt$. В результате приходим к интегралу

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}} &= - \int (t^2-1) \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{3}{2}} (t^2-1)^{-\frac{3}{2}}tdt = \\ &= - \int \frac{t^2-1}{t^2}dt = -t - \frac{1}{t} + C = -\sqrt{x^{-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{x^{-2}+1}} + C = -\frac{2x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}} + C. \end{aligned}$$

526. Перепишем интеграл в виде $\int x^{-3}(x^3-1)^{-\frac{1}{3}}dx$, тогда $m = -3$, $n = 3$, $p = -\frac{1}{3}$ и, поскольку $\frac{m+1}{n} + p = -1 \in \mathbb{Z}$, то сделаем подстановку $t^3 = 1 - x^{-3}$. Получаем $x = (1-t^3)^{-\frac{1}{3}}$, $dx = (1-t^3)^{-\frac{4}{3}}t^2dt$, $x^3 - 1 = t^3(1-t^3)^{-1}$. После подстановки приходим к интегралу

$$\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^3-1}} = \int (1-t^3)^{1+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} \cdot t^{-1} \cdot t^2dt = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}{2x^2} + C.$$

527. Приведём интеграл к виду

$$\int \sqrt[3]{x-x^3}dx = \int \sqrt[3]{x(1-x^2)}dx = \int x^{\frac{1}{3}}(1-x^2)^{\frac{1}{3}}dx.$$

Это интеграл от дифференциального бинома со значениями $m = p = \frac{1}{3}$, $a = 1$, $b = -1$. Поскольку $\frac{m+1}{n} + p = \frac{\frac{1}{3}+1}{2} + \frac{1}{3} = 1$ — целое число, то интеграл сводится к интегралу от рациональной функции третьей подстановкой: $t^3 = -1+x^{-2}$. Возьмём дифференциал от обеих частей этого равенства $-2x^{-3}dx = 3t^2dt$ и перейдём в интеграле к новой переменной:

$$\begin{aligned} I &= \int x^{\frac{1}{3}}(1-x^2)^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{1}{3}}(x^2(x^{-2}-1))^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}(x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}}dx = \\ &= \int x(x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}}dx = \int \frac{-2x^{-3}}{-2x^{-4}}(x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}}dx = \int \frac{(x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}}}{-2(x^{-2})^2}(-2x^{-3})dx = \\ &= \int \frac{t}{-2(t^3+1)^2} \cdot 3t^2dt = -\frac{1}{2} \int t(t^3+1)^{-2}d(t^3+1) = \frac{1}{2} \int t d((t^3+1)^{-1}). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2} \int t d(t^3 + 1)^{-1} = \frac{1}{2} t(t^3 + 1)^{-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^3 + 1}.$$

Последний интеграл вычислялся на предыдущем семинаре:

$$\int \frac{dt}{t^3 + 1} = \frac{1}{6} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2 - t + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно имеем:

$$I = \frac{t}{2(t^3 + 1)} - \frac{1}{12} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2 - t + 1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C, \quad \text{где } t = \sqrt[3]{x^{-2} - 1}.$$

528. Приведём интеграл к виду ($x \in (0, 3)$)

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{3x - x^2}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{\frac{3}{x} - 1}} = \operatorname{sgn} x \int \frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{3}{x} - 1}}$$

и выполним рекомендуемую подстановку $t = \sqrt{\frac{3}{x} - 1}$. Тогда $t^2 = \frac{3}{x} - 1 \Rightarrow x = \frac{3}{t^2 + 1} \Rightarrow dx = -\frac{6t dt}{(t^2 + 1)^2}$ и, подставляя в интеграл, получаем

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{3} \operatorname{sgn} x \int dt = -\frac{2}{3} \operatorname{sgn} x \cdot t + C = -\frac{2}{3} \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{\frac{3}{x} - 1} + C = \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{|x|}{x} \cdot \sqrt{\frac{3}{x} - 1} + C = -\frac{2}{3x} \sqrt{x^2 \left(\frac{3}{x} - 1 \right)} + C = -\frac{2}{3x} \sqrt{3x - x^2} + C. \end{aligned}$$

11 СЕМИНАР: Интегрирование тригонометрических, логарифмических, показательных, гиперболических и других трансцендентных функций

*«Чтобы узнать, что будет, надо к тому, что было,
прибавить то, что есть».*
Житейская мудрость.

Домашнее задание: 530, 536, 541, 543, 546, 549, 550, 554, 555, 557, 563, 564, 570, 574, 584, 588, 589, 595, 601, 603, 612, 615.

+ ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 13 декабря

При интегрировании тригонометрических функций наряду с алгебраическими преобразованиями эффективно используются всевозможные тригонометрические преобразования. Все интегралы вычисляются на промежутках области определения, где подынтегральные функции определены и непрерывны. В простейших случаях интегралы вычисляются непосредственным сведением их к табличным. Но в большинстве случаев надо знать подходы и осознанно применять их там, где нужно. Рассмотрим отдельные классы интегралов от тригонометрических функций и общие рекомендации по их вычислению.

11.1 Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x)dx$

«Чтение для ума — то же, что физические упражнения для тела».
*Джозеф Аддисон (1672–1719) — публицист, драматург,
эстетик, политик и поэт, который стоял у истоков
английского Просвещения.*

Здесь, как и прежде, под R понимается рациональная функция своих аргументов. Это достаточно широкий класс интегралов, если учесть, что $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ также выражаются через синус и косинус. Интегралы данного вида вычисляются следующими методами.

1. Метод универсальной подстановки. Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x)dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (или $t = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$). Тогда по формулам универсальной подстановки имеем

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, и далее интегралы вычисляются соответствующими методами интегрирования рациональных дробей. Обратим внимание на то, что в общем случае применение подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ возможно только на промежутках, не содержащих точек вида $\pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$ ($-\pi + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$).¹ В дальнейшем это подразумевается. К недостаткам этого подхода можно отнести тот факт, что универсальная подстановка во многих случаях приводит к сложным вычислениям. В частности, этим методом можно вычислять интегралы вида $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$.

Пример 165. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin x + 2}$.

Решение. Используем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x + 2} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + 2} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int \frac{dt}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} + C, \quad \text{где } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

2. В некоторых случаях вычисление интегралов данного типа может быть упрощено за счёт выбора других, более удачных, подстановок.

Случай, когда $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$

Если подынтегральная функция нечётна относительно $\sin x$, т. е. при всех x из области интегрирования верно $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \cos x$.

Пример 166. Вычислить $\int \operatorname{tg} x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C,$$

где $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Пример 167. Вычислить $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$.

Решение. Заметив, что подынтегральная функция $\frac{\sin x(1 + \sin^2 x)}{1 - 2\sin^2 x}$ нечётна относительно $\sin x$, сделаем рекомендуемую подстановку $t = \cos x$. Тогда $\sin^2 x = 1 - t^2$,

¹В силу периодичности функции $R(\sin x; \cos x)$ с периодом 2π , достаточно вычислить интеграл, например, на промежутке $x \in (-\pi, \pi)$, тогда $\frac{x}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. В случае подстановки в виде котангенса можно взять $x \in (0, 2\pi)$.

$-\sin x dx = dt$, и получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x (1 + \sin^2 x)}{1 - 2 \sin^2 x} dx &= \int \frac{(2 - \cos^2 x)(-d \cos x)}{2 \cos^2 x - 1} = \int \frac{(t^2 - 2)dt}{2t^2 - 1} = \\ &= \int \frac{t^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2(t^2 - \frac{1}{2})} dt = \frac{t}{2} - \frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{2}} = \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| + C = \\ &= \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| + C, \quad \text{где } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \square \end{aligned}$$

Случай, когда $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$.

Если подынтегральная функция $R(\sin x; \cos x)$ нечётна относительно $\cos x$, т. е. при всех допустимых x верно равенство $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то рекомендуется подстановка $t = \sin x$.

Пример 168. Вычислить $\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$.

Решение. Поскольку подынтегральная функция

$$\frac{(\cos^2 x + \cos^4 x) \cos x}{1 - \cos^2 x + (1 - \cos^2 x)^2}$$

нечётна относительно косинуса x , то положим $t = \sin x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 x (1 + \cos^2 x)}{\sin^2 x + \sin^4 x} d(\sin x) &= \int \frac{(1 - \sin^2 x)(2 - \sin^2 x)}{\sin^2 x (1 + \sin^2 x)} d(\sin x) = \\ &= \int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2)dt}{t^2(1 + t^2)} = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1 + t^2} \right) dt = \\ &= \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6 \operatorname{arctg}(\sin x) + C, \quad \text{где } x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \square \end{aligned}$$

Случай, когда $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$.

Если подынтегральная функция $R(\sin x; \cos x)$ чётна относительно синуса и косинуса, т. е. при всех допустимых x выполняется тождество $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то к цели приводит подстановка $t = \operatorname{tg} x$, где $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ (или $t = \operatorname{ctg} x$, где $x \in (\pi n, \pi + \pi n)$), $n \in \mathbb{Z}$. В данном случае в силу периодичности подынтегральной функции с периодом $T = \pi$, достаточно вычислить интеграл при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. При этом из тожде-

ства $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ имеем

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}},$$

где $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. В частности, этим способом можно вычислять тригонометрические интегралы вида

$$\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x}.$$

Пример 169. Вычислить $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + 1) - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} d(\operatorname{tg} x) = \int d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \\ &= \operatorname{tg} x - x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Однако проще было поступить следующим образом:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C. \quad \square$$

Пример 170. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1)} &= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x + 1)}{(\operatorname{tg} x + 1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C \quad (\operatorname{tg} x \neq -1 \pm \sqrt{2}). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема (общий случай). Любое рациональное выражение $R(u, v)$ аргументов u и v всегда можно представить в виде суммы трёх выражений, рассмотренных выше:

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2} + \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2},$$

или $R(u, v) = R_1(u, v) + R_2(u, v) + R_3(u, v)$, где функция $R_1(u, v)$ – нечётна относительно u , функция $R_2(u, v)$ – нечётна относительно v , а функция $R_3(u, v)$ – чётна относительно u и v .

Поэтому мы рассмотрели весьма общий подход к интегрированию рациональных выражений от тригонометрических функций.

11.2 Интегралы вида $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$

«Иногда стоит совершить ошибку, хотя бы ради того чтобы знать, почему её не следовало совершать».

Конфуций (551 г. до н. э. – 479 г. до н. э.) – древний мыслитель и философ Китая.

1. Интегралы вида $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$). Эти интегралы можно вычислять, последовательно понижая степень с помощью соответствующих формул:

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \\ \sin^3 x &= \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}, \quad \cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}, \\ \sin^4 x &= \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}, \quad \cos^4 x = \frac{3 + 4 \cos 2x + \cos 4x}{8} \text{ и др.}\end{aligned}$$

Интегрированием по частям можно вывести общие формулы понижения степени для интегралов данного вида.

Пример 171. Вычислить $\int \sin^3 x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \sin^3 x dx = \frac{1}{4} \int (3 \sin x - \sin 3x) dx = -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x + C.$$

Можно было интегрировать иначе:

$$\int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = - \int (1 - \cos^2 x) d \cos x = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C. \square$$

Пример 172. Вычислить $\int \sin^4 x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{8} \int (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \square$$

Если формулы понижения степени нет под рукой, её легко можно вывести или интегрировать постепенно:

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x) dx \quad \text{и т. д.}\end{aligned}$$

2. Случай, когда n и m – положительные чётные числа. Если оба показателя n и m – положительные чётные числа, то, как и в предыдущем пункте, применяются формулы понижения для 2-й, 3-й, 4-й и т. д. степеней:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Пример 173. Вычислить $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} \int \cos^2 x \cdot \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x) dx = \\ &= \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{32} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{32} \int (\cos 2x + \cos 6x) dx = \\ &= \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{32} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C = \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C. \quad \square \end{aligned}$$

3. Случай, когда n или m – натуральное нечётное число.

Если хотя бы один из показателей n или m – натуральное нечётное число, то рекомендуемая подстановка $t = \sin x$ (если m – натуральное нечётное) или $t = \cos x$ (если n – натуральное нечётное). При этом используются формулы $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, а также формулы понижения степени

$$\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}, \quad \cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4} \quad \text{и др.}$$

Пример 174. Вычислить $\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^4 x dx &= - \int \sin^4 x \cos^4 x d(\cos x) = - \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x d(\cos x) = \\ &= - \int (\cos^4 x - 2 \cos^6 x + \cos^8 x) d(\cos x) = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + C. \quad \square \end{aligned}$$

4. Случай, когда n и m – целые отрицательные числа одной чётности.

Если n и m – целые отрицательные числа одной чётности (оба одновременно чётны либо оба нечётны), то полагают $t = \operatorname{tg} x$ (или $t = \operatorname{ctg} x$) и применяют формулы

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Также бывает иногда полезно понизить степени в знаменателе, представляя единицу в числителе дроби как тригонометрическую единицу (или её степень).

Пример 175. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x} &= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^3}} = \\ &= \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^3 d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{(1+u^2)^3 du}{u^3} = \\ &= \int \left(\frac{1}{u^3} + \frac{3}{u} + 3u + u^3 \right) du = -\frac{1}{2u^2} + 3 \ln |u| + \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4 + C = \\ &= -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + 3 \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C \quad (x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}). \quad \square \end{aligned}$$

Пример 176. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Решение. 1-й способ. Распишем единицу в числителе как тригонометрическую

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \\ &= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

2-й способ. Можно было перейти к синусу двойного угла:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = 2 \int \frac{d(2x)}{\sin^2 2x} = -2 \operatorname{ctg} 2x + C. \quad \square$$

В частности, рассмотрим вычисление **интегралов вида**

$$\int \frac{dx}{\sin^n x}, \int \frac{dx}{\cos^n x} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Случай $n = 1$. Вычислить интегралы а) $\int \frac{dx}{\sin x}$, б) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

а) Имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Другой способ:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{x}{2})}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

б) Имеем:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + C.$$

Другой способ:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \int \frac{d(x + \frac{\pi}{2})}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Случай $n = 2$: табличные интегралы.

Случай $n = 3$: а) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$, б) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{dx}{\sin^3 x} &= \int \frac{\sin x \, dx}{\sin^4 x} = - \int \frac{d(\cos x)}{(1 - \cos^2 x)^2} = - \int \frac{dt}{(1 - t)^2(1 + t)^2} = \dots = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + C. \end{aligned}$$

б) Аналогично можно поступить со вторым интегралом:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + C.$$

Случай $n = 4$. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sin^4 x}, \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{dx}{\sin^4 x} &= - \int \frac{1}{\sin^2 x} d(\operatorname{ctg} x) = - \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) d(\operatorname{ctg} x) = \\ &= - \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C \quad (x \neq \pi n, \, n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \frac{1}{\cos^2 x} d(\operatorname{tg} x) = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \, n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Вообще, при $n > 2$ интеграл $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ сводится к рассмотренному выше типу интегралов $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ для случая, когда n и m – целые отрицательные числа одной чётности:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{2^{n-1} \sin^n \frac{x}{2} \cdot \cos^n \frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \int \frac{du}{\sin^n u \cdot \cos^n u}.$$

Интеграл вида $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ сводится к интегралу типа $\int \frac{dt}{\sin^n t}$:

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{d(x + \frac{\pi}{2})}{\sin^n(x + \frac{\pi}{2})} = \int \frac{dt}{\sin^n t}.$$

Иногда они вычисляются с помощью формул

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x.$$

Интегралы от нечётной натуральной степени секанса или косеканса находятся по рекуррентным формулам понижения:

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{\cos^{2n-1} x}, \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x} = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{\sin^{2n-1} x}. \quad (2)$$

5. Случай, когда n и m – целые отрицательные числа, причём одно из них нечётное.

Если n и m – целые отрицательные числа, причём одно из них нечётное, то полагают $t = \sin x$ (если m – нечётное) или $t = \cos x$ (если n – нечётное). Иногда в случае больших степеней n и m с целью понижения этих степеней полезно в числителе подынтегральной функции неоднократно заменить единицу тригонометрической единицей в виде суммы $\sin^2 x + \cos^2 x$ или даже её степенью.

Пример 177. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^4 x}$.

Решение. Представим единицу в числителе как квадрат тригонометрической:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^4 x} &= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^3 x \cdot \cos^4 x} dx = \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx + 2 \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \end{aligned}$$

(во втором интеграле ещё раз распишем единицу в числителе, теперь просто как тригонометрическую)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3 \cos^3 x} + 2 \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x \cdot \cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \\ &= \frac{1}{3 \cos^3 x} + 2 \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + 2 \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \end{aligned}$$

(все интегралы уже вычислялись ранее)

$$= \frac{1}{3 \cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{5}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C \quad (x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

6. Случай, когда один из показателей степеней чётный, а другой – целый отрицательный.

Если n – чётное число, а m – целое отрицательное число, то можно заменить $\sin^2 x$ по формуле $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, и в этом случае интеграл сводится к интегралу вида $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ ($n \in \mathbb{N}$). В случае чётного m и целого отрицательного n аналогично заменяют $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$. Если оба показателя n и m – чётны, то полагают $t = \operatorname{tg} x$. Если оба показателя степени отрицательны, то с целью понижения этих степеней иногда рекомендуется заменить единицу в числителе подынтегральной функции суммой $\sin^2 x + \cos^2 x$ или её степенью.

Пример 178. Вычислить $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x} dx$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^5 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^5 x} - 2 \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Осталось подставить вместо I_1 , I_2 и I_3 известные выражения для этих интегралов (первый из интегралов вычисляется в одной из задач в конце данного параграфа:

$$I_1 = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_1.$$

Ответ: $\frac{\sin x}{4 \cos^4 x} - \frac{5 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 179. Вычислить $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

Решение. Полагая $t = \operatorname{tg} x$, находим

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2 (t^2 + 1) dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C,$$

где $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ $\square$

7. Случай, когда один из показателей степеней нечётный, а другой – целый отрицательный.

Если n – нечётное число, а m – целое отрицательное число, то полагают $t = \cos x$ и применяют формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. В случае, когда m – нечётное, а n – целое отрицательное число, полагают $t = \sin x$ и применяют формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Пример 180. Вычислить $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^2 x} dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^7 x}{\cos^2 x} dx &= - \int \frac{\sin^6 x d(\cos x)}{\cos^2 x} = - \int \frac{(1 - \cos^2 x)^3 d(\cos x)}{\cos^2 x} = \\ &= - \int \frac{1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6}{u^2} du = \frac{1}{u} + 3u - u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \\ &= \frac{1}{\cos x} + 3 \cos x - \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}). \quad \square \end{aligned}$$

**11.3 Интегралы вида $\int \sin(ax) \cos(bx) dx$,
 $\int \sin(ax) \sin(bx) dx$, $\int \cos(ax) \cos(bx) dx$,
а также $\int \sin(ax) \sin(bx) \sin(cx) dx$ и др.**

«Только самые мудрые и самые глупые не поддаются обучению».

Конфуций – древний мыслитель и философ Китая.

Эти интегралы находятся с помощью тригонометрических формул преобразования произведений синусов и косинусов в суммы (разности):

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Пример 181. Вычислить $\int (\cos 3x \cdot \cos x) dx$.

Решение. Имеем

$$\int \cos 3x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \quad \square$$

11.4 Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^n x \, dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x \, dx$ ($n \in \mathbb{N}$)

Случаи $n = 1$ и $n = 2$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x \, dx &= \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C; \\ \int \operatorname{tg}^2 x \, dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \\ &= \operatorname{tg} x - x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \, n \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

При $n > 2$ указанные интегралы вычисляются с помощью формул

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

которые последовательно понижают степень тангенса или котангенса.

Пример 182. Вычислить $\int \operatorname{tg}^7 x \, dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^7 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^5 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \operatorname{tg}^5 x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^5 x \, dx = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \int \operatorname{tg}^3 x \, d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \int \operatorname{tg} x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \, n \in \mathbb{Z}). \quad \square\end{aligned}$$

11.5 Интегралы вида $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$

1. При вычислении интегралов вида $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$ можно сделать универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Вместе с тем можно сначала преобразовать подынтегральную функцию методом введения вспомогательного аргумента

$$\frac{1}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)},$$

где $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, и положить далее $t = \operatorname{tg} \frac{x + \varphi}{2}$. Тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x + \varphi) = \frac{2t}{1+t^2}$ и приходим к интегралу

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \ln |t| + C = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \varphi}{2} \right| + C.$$

2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$ вычисляются универсальной подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Применение данной подстановки возможно только на промежутках, не содержащих точек вида $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Обычно берут $\frac{x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

Пример 183. Вычислить $\int \frac{dx}{3 \sin x + \cos x}$.

Решение. 1-й способ.

$$\int \frac{dx}{3 \sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{\sqrt{10} \cdot \sin(x + \varphi)}, \quad \text{где } \varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Положим $t = \operatorname{tg} \frac{x + \varphi}{2}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{10}} \int \frac{dx}{\sin(x + \varphi)} &= \frac{1}{\sqrt{10}} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{10}} \ln |t| + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \varphi}{2} \right| + C \quad (\sin(x + \varphi) \neq 0). \end{aligned}$$

2-й способ. Преобразовав подынтегральное выражение, положим $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 \sin x + \cos x} &= \int \frac{dx}{6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \int \frac{dx}{(6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) \cos^2 \frac{x}{2}} = -2 \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{x}{2})}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} = \\ &= -2 \int \frac{dt}{(t-3)^2 - 10} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{t-3-\sqrt{10}}{t-3+\sqrt{10}} \right| + C = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 - \sqrt{10}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 + \sqrt{10}} \right| + C \quad (\cos \frac{x}{2} \neq 0). \quad \square \end{aligned}$$

Пример 184. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin x + 1}$.

Решение. Помимо метода универсальной подстановки, этот интеграл можно также вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x + 1} &= - \int \frac{d(\frac{\pi}{2} - x)}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} = - \int \frac{d(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} = \\ &= - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + C \quad (x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}). \quad \square \end{aligned}$$

11.6 Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)}, \quad \int \frac{dx}{\cos(x+a) \cdot \cos(x+b)}$$

*«Драгоценный камень нельзя отполировать без трения.
Также и человек не может стать успешным без достаточного количества
трудных попыток».*

Конфуций (551 г. до н. э. – 479 г. до н. э.)

Для вычисления первого из интегралов используется искусственный приём умножения и одновременного деления подынтегральной функции на выражение $\sin(a-b)$ ($\neq 0$) с последующим разбиением интеграла на разность двух интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)} &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(a-b)}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)} dx = \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin((x+a) - (x+b))}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)} dx = \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a) \cos(x+b) - \cos(x+a) \sin(x+b)}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)} dx = \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \left(\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} dx - \int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} dx \right) = \frac{1}{\sin(a-b)} \cdot \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C. \end{aligned}$$

Второй интеграл вычисляется аналогично.

Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin(x+a) \cdot \cos(x+b)}$ с помощью формул приведения сводятся к одному из предыдущих видов, например

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a) \cos(x+b)} = - \int \frac{dx}{\sin(x+a) \sin(x+(b-\frac{\pi}{2}))} \text{ и т. д.}$$

11.7 Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}, \int \frac{dx}{\cos x - \cos a}$

При вычислении первого из интегралов следует умножить и разделить подынтегральную функцию на $\cos a$ и затем воспользоваться тождествами

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}, \quad \cos a = \cos \left(\frac{x-a}{2} - \frac{x+a}{2} \right) :$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x - \sin a} &= \frac{1}{2 \cos a} \int \frac{\cos(\frac{x-a}{2} - \frac{x+a}{2})}{\sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2 \cos a} \int \frac{\cos \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2} + \sin \frac{x-a}{2} \cdot \sin \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2 \cos a} \int \left(\frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}} + \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right) dx = \frac{1}{\cos a} \left(\int \frac{d(\sin \frac{x-a}{2})}{\sin \frac{x-a}{2}} - \int \frac{d(\cos \frac{x+a}{2})}{\cos \frac{x+a}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\cos a} \left(\ln \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \right) + C = \frac{1}{\cos a} \cdot \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right| + C \end{aligned}$$

($\cos a \neq 0, \sin x \neq \sin a$).

При вычислении интеграла $\int \frac{dx}{\cos x - \cos a}$ поступают аналогично. Случай $\int \frac{dx}{\sin x - \cos a}$ приводится к одному из двух рассмотренных выше при помощи формул приведения

$$\int \frac{dx}{\cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos a} \quad \text{или} \quad \int \frac{dx}{\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - a)}.$$

11.8 Интегралы вида $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$

При вычислении интегралов данного вида представим числитель $a_1 \sin x + b_1 \cos x$ дроби в виде линейной комбинации знаменателя $a \sin x + b \cos x$ и его производной $a \cos x - b \sin x$:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x \equiv A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x),$$

где A и B – постоянные. Найдём A и B методом неопределённых коэффициентов. Два линейных тригонометрических многочлена относительно функций $\sin x$ и $\cos x$ тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты, соответственно, при $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому приходим к системе

$$\begin{cases} a_1 = Aa - Bb, \\ b_1 = Ab + Ba, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{a_1 a + b_1 b}{a^2 + b^2}, \\ B = \frac{a b_1 - a_1 b}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Подставляя полученное разложение под знак интеграла, находим:

$$\begin{aligned}\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx &= \int \frac{A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x)}{a \sin x + b \cos x} dx = \\ &= Ax + B \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x} = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C.\end{aligned}$$

Пример 185. Вычислить $\int \frac{\sin x - 3 \cos x}{4 \sin x + 5 \cos x} dx$.

Решение. Представим числитель в виде

$$\sin x - 3 \cos x \equiv A(4 \sin x + 5 \cos x) + B(4 \cos x - 5 \sin x).$$

Отсюда имеем систему

$$\begin{cases} 1 = 4A - 5B, \\ -3 = 5A + 4B, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{11}{41}, \\ B = -\frac{17}{41}. \end{cases}$$

Таким образом, приходим к интегралу

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x - 3 \cos x}{4 \sin x + 5 \cos x} dx &= -\frac{11}{41} \int dx - \frac{17}{41} \int \frac{d(4 \sin x + 5 \cos x)}{4 \sin x + 5 \cos x} = \\ &= -\frac{11}{41} x - \frac{17}{41} \ln |4 \sin x + 5 \cos x| + C. \quad \square\end{aligned}$$

11.9 Интегралы, берущиеся по частям

«Давай наставления только тому, кто ищет знаний, обнаружив свое невежество».

Конфуций, китайский философ, основатель философской системы, известной как конфуцианство.

Часто в ситуациях, когда под знаком интеграла помимо тригонометрической функции находится функция другого типа (алгебраический многочлен, логарифмическая или показательная), для вычисления интеграл применяется метод интегрирования по частям.

Пример 186. Вычислить $\int \cos^2(\sqrt{x}) dx$.

Решение. Положим $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, $dx = 2t dt$ и приходим к интегралу ($x \geq 0$)

$$\int \cos^2(\sqrt{x}) dx = 2 \int t \cdot \cos^2 t dt = \int t(1 + \cos 2t) dt = \frac{t^2}{2} + \int t \cdot \cos 2t dt.$$

Последний интеграл вычисляется интегрированием по частям:

$$I = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \sin(2\sqrt{x}) + \frac{1}{4} \cos(2\sqrt{x}) + C.$$

Пример 187. Вычислить $\int \frac{x \cdot \cos x \, dx}{\sin^3 x}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{x \cdot \cos x \, dx}{\sin^3 x} &= \int \frac{x \, d(\sin x)}{\sin^3 x} = \int x \, d\left(-\frac{1}{2\sin^2 x}\right) = \\ &= -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n, \, n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Пример 188. Вычислить $\int (x \cdot \operatorname{tg}^2 x) dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int (x \cdot \operatorname{tg}^2 x) dx &= \int x \, d(\operatorname{tg} x - x) = x(\operatorname{tg} x - x) - \int (\operatorname{tg} x - x) dx = \\ &= x \cdot \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \, n \in \mathbb{Z}\right). \quad \square \end{aligned}$$

11.10 Интегрирование гиперболических, показательных, логарифмических и обратных тригонометрических выражений

«А сейчас, господа, мы перейдём к теореме, имя которой я имею честь носить».

Жан Лерон Даламбёр (1717–1783) – французский учёный-энциклопедист. Широко известен как философ, математик и механик. Говорил, что «чтение математических книг — это отдых». Следуя И. Ньютону, Даламбер предложил положить в основу анализа понятия производной и предела (хотя термин «производная» он не употреблял). Ему принадлежит одно из первых определений предела. Идеи Даламбера были осуществлены в 19 веке О. Коши.

При интегрировании выражений, содержащих логарифмические, гиперболические и прочие трансцендентные функции, для преобразований используются соответствующие формулы. При этом большинство практических приёмов интегрирования гиперболических функций имеют свои аналоги среди соответствующих приёмов, разработанных для тригонометрических функций. Напомним эти формулы.

1. Основное гиперболическое тождество:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

а также $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x = e^{\pm x}$.

2. Формулы $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $\operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ ($x \neq 0$).

3. Формулы сложения:

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \quad \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x}.$$

4. Формулы двойного аргумента:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{cth} 2x = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x}{2}, \quad \operatorname{ch} 2x \pm \operatorname{sh} 2x = (\operatorname{sh} x \pm \operatorname{ch} x)^2.$$

Формулы тройного аргумента:

$$\operatorname{sh} 3x = 4 \operatorname{sh}^3 x + 3 \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x.$$

5. Формулы универсальной подстановки:

$$\operatorname{sh} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{ch} 2x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x}.$$

6. Формулы понижения степени: $\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$, $\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$.

7. Формулы: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} 2x}{1 + \operatorname{ch} 2x} = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\operatorname{sh} 2x}$.

Пример 189. Вычислить $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\operatorname{th} \frac{x}{2})}{\operatorname{th} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Пример 190. Вычислить $\int \operatorname{ch}^4 x dx$.

Решение. Применяя формулу понижения степени, получаем

$$\int \operatorname{ch}^4 x dx = \frac{1}{4} \int (1 + \operatorname{ch} 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + 2 \operatorname{ch} 2x + \frac{1 + \operatorname{ch} 4x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} + 2 \operatorname{ch} 2x + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 4x \right) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{2} + \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8} \operatorname{sh} 4x \right) + C. \square$$

Если подынтегральное выражение содержит показательную функцию, то либо этот интеграл сводится к табличному, либо следует подобрать соответствующую подстановку (внести подходящую функцию под знак дифференциала), либо проинтегрировать по частям.

Пример 191. Вычислить $\int (2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x}) dx$.

Решение. Имеем

$$\int (2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x}) dx = \int (2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)^x dx = \int 2250^x dx = \frac{2250^x}{\ln 2250} + C. \square$$

Пример 192. Вычислить $\int e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x^3}$.

Решение. Внесём $\frac{1}{x^3}$ под знак дифференциала: $\frac{dx}{x^3} = d\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ и получим

$$\int e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2} \int e^{-\frac{1}{x^2}} d\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} + C \quad (x \neq 0). \square$$

Если подынтегральное выражение содержит логарифмическую функцию, то так же, как и в случае с показательной функцией, интеграл либо сводится к табличному, либо берётся с помощью некоторой подстановки, либо интегрируется по частям.

Пример 193. Вычислить $\int \ln^2 x dx$.

Решение. Дважды интегрируя при $x > 0$ по частям, находим

$$\begin{aligned} \int \ln^2 x dx &= x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C. \square \end{aligned}$$

Пример 194. Вычислить $\int x^2 \ln x dx$.

Решение. Интегрируя по частям при $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$, получаем

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C \quad (x > 0). \square$$

При интегрировании обратных тригонометрических функций используются всё те же общие приёмы интегрирования (преобразования, замена переменной, интегрирование по частям). Интегралы вида

$$\int P(x) \arcsin x dx, \quad \int P(x) \arccos x dx, \quad \int P(x) \operatorname{arctg} x dx, \quad \int P(x) \operatorname{arcctg} x dx,$$

где $P(x)$ – целый алгебраический многочлен, вычисляются интегрированием по частям.

Пример 195. Вычислить $\int \frac{dx}{\arcsin^5 x \cdot \sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{\arcsin^5 x \cdot \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin^5 x} = -\frac{1}{4 \arcsin^4 x} + C \quad (0 < |x| < 1). \quad \square$$

Пример 196. Вычислить $\int \arccos x dx$.

Решение. Положим $u = \arccos x$, $dv = dx$ и проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned} \int \arccos x dx &= x \cdot \arccos x + \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \\ &= x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \quad (|x| < 1). \quad \square \end{aligned}$$

Пример 197. Вычислить $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Полагая $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$ и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \\ &= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \quad \square \end{aligned}$$

11.11 Задачи для самостоятельного решения

Используя универсальные тригонометрические подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ или $t = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, вычислить интеграл:

№529. $\int \frac{\cos x}{\sin x(1 - \cos x)} dx;$

№530. $[7, \text{№ } 2025] \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5};$

№531. $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x};$

№532. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Используя подстановки $t = \sin x$ или $t = \cos x$, вычислить интегралы:

№533. $[7, \text{№ } 1991] \int \cos^5 x dx;$

№534. $\int \sin^3 x \cos^8 x dx;$

№535. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x};$

№536. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} dx;$

№537. $\int \frac{\sin 2x}{4 \cos^2 x + 12 \cos x - 7} dx;$

№538. $\int \frac{\cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x + 2 \sin^2 x + 1} dx.$

Используя подстановки $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$, вычислить интегралы:

№539. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x (\sin x + \cos x)} dx;$

№540. $\int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx;$

№541. $[7, \text{№ } 2007] \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}};$

№542. $[7, \text{№ } 2029] \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx;$

№543. $[7, \text{№ } 2034] \int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx.$

Используя различные приёмы, вычислить интегралы от тригонометрических функций:

№544. $[7, \text{№ } 2013] \int (\sin 5x \cdot \cos 3x) dx;$

№545. $\int \left(\sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{3} \right) dx;$

№546. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x};$

№547. $[7, \text{№ } 1992] \int \sin^6 x dx;$

$$\text{№548. } \int \cos^6 x dx;$$

$$\text{№549. } \int \operatorname{ctg}^5 x dx;$$

$$\text{№550. } [7, \text{№ 2001}] \int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x};$$

$$\text{№551. а) } \int \frac{dx}{\sin^5 x}, \text{ б) } \int \frac{dx}{\cos^5 x}.$$

Указание: воспользоваться рекуррентными формулами (1),(2).

$$\text{№552. } \int \operatorname{tg}^4 x \cdot \frac{dx}{\cos^6 x};$$

$$\text{№553. } \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x + 2} dx;$$

$$\text{№554. } [7, \text{№ 2009}] \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}};$$

$$\text{№555. } [7, \text{№ 2017}] \int \cos^2(ax) \cdot \cos^2(bx) dx \quad (a \neq \pm b);$$

$$\text{№556. } \int \frac{dx}{\sin(x+1) \cdot \sin(x-2)};$$

$$\text{№557. } [7, \text{№ 2020}] \int \frac{dx}{\sin(x+a) \cdot \cos(x+b)} \quad (a-b \neq \frac{\pi}{2} + \pi n).$$

Указание. Воспользоваться тождеством

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos((x + \alpha) - (x + \beta)).$$

$$\text{№558. } \int \frac{dx}{\sin(x-1) \cos x};$$

$$\text{№559. } \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx.$$

Указание: проинтегрировать по частям, положив $u = \cos x$, $dv = \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$.

№560. Вывести формулу понижения для интегралов

$$I_n = \int \sin^n x dx \quad (n \in \mathbb{N}, n > 2).$$

$$\text{№561. } \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx;$$

$$\text{№562. } [7, \text{№ 2037}] \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx;$$

$$\text{№563. } [7, \text{№ 2038}] \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^4 x} dx;$$

$$\text{№564. } [7, \text{№ 2043(a)}] \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx;$$

$$\text{№565. } [7, \text{№ 2043(б)}] \int \frac{\sin x}{\sin x - 3 \cos x} dx;$$

$$\text{№566. } \int \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 2} dx.$$

Указание: Представить числитель в виде линейной комбинации знаменателя, его производной и константы.

$$\text{№567. } \int \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}{\sin x - 2 \cos x} dx.$$

Указание: представить числитель в виде $(A \sin x + B \cos x)(\sin x - 2 \cos x) + D(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

$$\text{№568. } \int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \cos^2 x};$$

$$\text{№569. } \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$$

Указание: воспользоваться формулами понижения степени.

$$\text{№570. } \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Указание: воспользоваться тождеством

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 - \frac{1}{2}.$$

$$\text{№571. } \int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx;$$

$$\text{№572. } \int \frac{\sin^5 x}{1 - \cos x} dx.$$

Указание: умножить числитель и знаменатель на выражение $1 + \cos x$.

$$\text{№573. } \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + 4 \sin x}} dx.$$

Указание: сделать подстановку $t = \sqrt{1 + 4 \sin x}$.

$$\text{№574. } \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}}.$$

Указание: сделать подстановку $t = \sqrt{1 + \cos x}$.

$$\text{№575. } \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 - \cos^4 x}} dx.$$

Указание: сделать подстановку $t = \cos^2 x$.

$$\text{№576. } \int \frac{-4 \sin x \cos x}{\sqrt{(2 \sin^2 x - 1)^2}} dx.$$

Используя различные приёмы, вычислить интегралы от гиперболических, показательных, логарифмических, обратных тригонометрических и смешанных функций:

$$\text{№577. } \int \operatorname{sh}^2 x \, dx;$$

$$\text{№578. } \int \operatorname{sh}^3 x \, dx;$$

$$\text{№579. } \int \operatorname{cth}^2 x \, dx;$$

$$\text{№580. } \int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} dx;$$

$$\text{№581. } \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}};$$

$$\text{№582. } \int (\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x) dx;$$

$$\text{№583. } \int (\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x) dx;$$

$$\text{№584. } \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x};$$

$$\text{№585. } \int \sqrt{\operatorname{th} x} \, dx.$$

Указание: сделать подстановку $t = \sqrt{\operatorname{th} x}$ и воспользоваться известным представлением функции, обратной к $\operatorname{th} x$: $\operatorname{Arth}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ($|x| < 1$) (*арка тангенс*).

$$\text{№586. } \int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx;$$

$$\text{№587. } \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$$

$$\text{№588. } \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}};$$

$$\text{№589. } \int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx;$$

$$\text{№590. } \int e^{-\sqrt[3]{x+1}} dx;$$

$$\text{№591. } \int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}};$$

$$\text{№592. } \int \frac{3e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x - 3} dx;$$

$$\text{№593. } \int x^x (1 + \ln x) dx;$$

$$\text{№594. } \int \frac{\ln x}{x^2} dx;$$

$$\text{№595. } \int x \ln^2 x dx;$$

$$\text{№596. } \int x \ln(x^2 - 1) dx;$$

$$\text{№597. } \int (x^2 + x)e^{-x} dx;$$

$$\text{№598. } \int x^3 e^{3x} dx;$$

$$\text{№599. } \int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx;$$

$$\text{№600. } \int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)};$$

$$\text{№601. } \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx;$$

$$\text{№602. } \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$$

$$\text{№603. } \int \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$\text{№604. } \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{x+1};$$

$$\text{№605. } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} dx;$$

$$\text{№606. } \int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\text{№607. } \int \frac{\arcsin(e^x)}{e^x} dx;$$

$$\text{№608. } \int (x^2 \cdot \arccos x) dx;$$

- №609.** $\int x \cdot \arcsin(1-x) dx$;
№610. $\int (\arcsin x)^2 dx$;
№611. $\int (2x^2 - 1) \cos 2x dx$;
№612. а) $\int \sin(\ln x) dx$; б) $\int \cos(\ln x) dx$;
№613. $\int x^{n+1} \ln(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N})$;
№614. $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx$;
№615. $\int \frac{x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$;
№616. [7, № 2157] $\int \frac{x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx$;
№617. [7, № 2159] $\int x(1+x^2) \operatorname{arctg} x dx$;
№618. $\int x^7 \operatorname{arctg} x dx$;
№619. $\int \frac{x \arcsin x dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$;
№620. $\int x \cdot \operatorname{tg}^4 x dx$.

11.12 Ответы и решения

529. Положим $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, тогда $x = 2 \operatorname{arctg} t$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2tdt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{1-t^2}{t^2} dt = -\frac{1}{2t} - \frac{t}{2} + C = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

530. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} &= \int \frac{dx}{4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 5 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right)} = \\ &= 2 \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 5 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right)} = \\ &= \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \cos^2 \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 6 \sin^2 \frac{x}{2}} = \\ & \text{(подстановка } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \text{)} \\ &= 2 \int \frac{dt}{4 + 4t + 6t^2} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

531. Применив универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, придём к интегралу

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 2} = \\ &= \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{7}} + C \end{aligned}$$

($x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$).

532. Применив универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, придём к интегралу

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3 x} &= \frac{1}{4} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t\right) dt = \\ &= -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2} \ln |t| + \frac{t^2}{8} + C = -\frac{1}{8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{8} + C. \end{aligned}$$

533. Даже если сразу мы не видим нужную подстановку, следует преобразовать подынтегральное выражение, и тогда необходимая подстановка становится очевидной:

$$\int \cos^5 x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) =$$

(подстановка $t = \sin x$)

$$= \int (1 - t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4) dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

534. Имеем

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^8 x dx &= - \int \sin^2 x \cos^8 x d(\cos x) = \\ &= - \int (1 - \cos^2 x) \cos^8 x d(\cos x) = \left| t = \cos x \right| = - \int (1 - t^2) t^8 dt = \\ &= \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^9}{9} + C = \frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^9 x}{9} + C. \end{aligned}$$

535. После преобразований положим $t = \operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x} &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \int t^2 (1 + t^2) dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C \quad (\cos x \neq 0). \end{aligned}$$

536. Приведём интеграл к виду $\int \sin^3 x \cos^{-\frac{4}{3}} x dx$ и сделаем подстановку $t = \cos x$:

$$\begin{aligned} - \int (1 - t^2) t^{-\frac{4}{3}} dt &= \int (t^{\frac{2}{3}} - t^{-\frac{4}{3}}) dt = \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + 3 t^{-\frac{1}{3}} + C = \\ &= \frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^5 x} + \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

537. Так как подынтегральная функция нечётна относительно $\sin x$, то в результате подстановки $t = \cos x$ получаем

$$\int \frac{-2t dt}{4(t^2 + 3t + \frac{9}{4}) - 16} = -\frac{1}{2} \int \frac{t dt}{(t + \frac{3}{2})^2 - 4} = -\frac{1}{2} \int \frac{u du}{u^2 - 4} + \frac{3}{4} \int \frac{du}{u^2 - 4} =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln \left| \left(\cos x + \frac{3}{2} \right)^2 - 4 \right| + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{\cos x + \frac{1}{2}} \right| + C,$$

где $x \neq \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

538. Замечая, что подынтегральная функция нечётна относительно косинуса, положим $t = \sin x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{d \sin x}{(1 - \sin^2 x)^2 + \sin^4 x + 2 \sin^2 x + 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} dt - \\ &- \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} dt = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \frac{\sin^2 x + \sqrt{2} \sin x + 1}{\sin^2 x - \sqrt{2} \sin x + 1} + \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \sin x + 1 \right) + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \sin x - 1 \right) \right) + C. \end{aligned}$$

539. Поделив одновременно числитель и знаменатель дроби на $\cos x$, приходим к интегралу ($\operatorname{tg} x \neq -1$):

$$\int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg} x} = -\ln |1 + \operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x + C.$$

540. Вынесем в знаменателе $\cos^2 x$ за скобку и сделаем замену $t = \operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx &= \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\operatorname{tg}^2 x + 2} d(\operatorname{tg} x) = \int \frac{2t + 3}{t^2 + 2} dt = \int \frac{2t dt}{t^2 + 2} + 3 \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \\ &= \ln(t^2 + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \ln(\operatorname{tg}^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

541. Имеем (при $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x \cos^8 x}} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} = \\ &= \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} d(\operatorname{tg} x) = -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + \frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + C. \end{aligned}$$

542. Имеем ($t = \operatorname{tg} x$):

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx = x - \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = x - \int \frac{dx}{2 \sin^2 x + \cos^2 x} =$$

$$\begin{aligned}
&= x - \int \frac{dt}{2t^2 + 1} = x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) + C = \\
&= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.
\end{aligned}$$

543. Положим $t = \operatorname{ctg} x$, $dx = -\frac{dt}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$, тогда

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin x \, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \int \frac{\frac{1}{\sin^2 x} dx}{1 + \operatorname{ctg}^3 x} = \int \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 x) dx}{1 + \operatorname{ctg}^3 x} = \\
&= - \int \frac{(1 + t^2) dt}{(1 + t^3)(1 + t^2)} = - \int \frac{dt}{1 + t^3} = - \int \left(\frac{A}{t + 1} + \frac{Bt + C}{t^2 - t + 1} \right) dt = \\
&= - \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{t + 1} + \frac{-\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}}{t^2 - t + 1} \right) dt = \dots \\
&= -\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{3} \sin x} + C.
\end{aligned}$$

544. Имеем

$$\int \sin 5x \cdot \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) \, dx = -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

545. Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) \sin \frac{x}{3} \, dx = \\
&= \frac{1}{4} \int \left(-\sin \frac{x}{6} + \sin \frac{5x}{6} + \sin \frac{7x}{6} - \sin \frac{11x}{6} \right) \, dx = \\
&= \frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11x}{6} + C.
\end{aligned}$$

546. Распишем единицу в числителе как тригонометрическую:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \\
&= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{\cos x} + C \quad (x \neq \frac{\pi n}{2}, \, n \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

547. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int \sin^6 x \, dx = \frac{1}{8} \int (2 \sin^2 x)^3 \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)^3 \, dx = \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}x - \frac{3}{8} \int \cos 2x dx + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x) = \\
&= \frac{5}{16}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.
\end{aligned}$$

548. Имеем

$$\begin{aligned}
\int (\cos x^2)^3 dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3 dx = \frac{1}{8} \int (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx = \\
&= \frac{x}{8} + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx = \\
&= \frac{x}{8} + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64} \sin 2x + \frac{1}{8} \int \cos 2x dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \\
&= \frac{5x}{16} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.
\end{aligned}$$

549. В тексте пособия рассмотрен один из способов решения. Попробуем решить задачу иначе. Сделаем замену $t = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0, \pi)$, тогда $x = \operatorname{arccotg} t$, $dx = -\frac{dt}{1+t^2}$ и приходим к интегралу от рациональной функции ($\sin x \neq 0$)

$$I = \int \operatorname{ctg}^5 x dx = - \int t^5 \cdot \frac{dt}{1+t^2}.$$

Выделим целую часть в подынтегральной функции, разделив числитель на знаменатель: $\frac{t^5}{1+t^2} = t^3 - t + \frac{t}{1+t^2}$. Тогда

$$\begin{aligned}
I &= - \int \frac{t^5}{1+t^2} dt = - \int \left(t^3 - t + \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \\
&= -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = -\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{ctg}^2 x) + C = \\
&= -\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln |\sin x| + C.
\end{aligned}$$

550. Имеем при $\sin 2x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = 2^4 \int \frac{dx}{\sin^4 2x} = 2^4 \int (1 + \operatorname{ctg}^2 2x)^2 dx = \\
&(d(\operatorname{ctg} 2x) = -\frac{2}{\sin^2 2x} dx = -2(1 + \operatorname{ctg}^2 2x) dx) \\
&= -2^3 \int (1 + \operatorname{ctg}^2 2x) d(\operatorname{ctg} 2x) = -8 \operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3} \operatorname{ctg}^3 2x + C.
\end{aligned}$$

551. а) Применяя рекуррентную формулу (2) при $n = 2$, получим

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

Полагая теперь $n = 1$, по той же формуле имеем

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Окончательно имеем:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C \quad (x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}).$$

б) *1-й способ.* Действуя аналогично, получаем

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

2-й способ. При $\cos x \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{d(x + \frac{\pi}{2})}{\sin^5(x + \frac{\pi}{2})} &= \frac{1}{16} \int \frac{d(\frac{u}{2})}{\sin^5 \frac{u}{2} \cdot \cos^5 \frac{u}{2}} = \frac{1}{16} \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{u}{2})}{\frac{\sin^5 \frac{u}{2}}{\cos^5 \frac{u}{2}} \cdot \cos^8 \frac{u}{2}} = \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2})^4}{\operatorname{tg}^5 \frac{u}{2}} d\left(\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right) = \frac{1}{16} \int \frac{(1 + z^2)^4}{z^5} dz = \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{1 + 4z^2 + 6z^4 + 4z^6 + z^8}{z^5} dz = -\frac{1}{64} z^{-4} - \frac{1}{8} z^{-2} + \frac{3}{8} \ln |z| + \frac{1}{8} z^2 + \frac{1}{64} z^4 + C = \\ &= \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

552. Имеем

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^4 x \cdot \frac{dx}{\cos^6 x} &= \int \operatorname{tg}^4 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 d(\operatorname{tg} x) = \int \operatorname{tg}^4 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) + 2 \int \operatorname{tg}^6 x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^8 x d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{7} \operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^9 x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

553. Имеем

$$I = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x + 2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \sin x \cos x dx}{\cos^2 x (\cos^2 x + 2)} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(\cos^2 x)}{\cos^2 x (\cos^2 x + 2)} =$$

$$= \left| t = \cos^2 x \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(t+2)}.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{1}{t(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} \quad \text{и находим } A = -B = \frac{1}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+2} \right) = \frac{1}{4} (\ln |t+2| - \ln |t|) + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+2}{t} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\cos^2 x + 2}{\cos^2 x} \right| + C \quad (\cos x \neq 0). \end{aligned}$$

554. Положим $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, тогда $\operatorname{tg} x = t^2$, $\frac{dx}{\cos^2 x} = 2t dt$, $(1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = 2t dt$ и получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} &= 2 \int \frac{dt}{1+t^4} = 2 \int \frac{dt}{(t^4 + 2t^2 + 1) - 2t^2} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{(t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)} = 2 \int \left(\frac{At + B}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \frac{Ct + D}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} \right) dt = \\ &(\text{методом неопределённых коэффициентов ищем } A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, B = D = \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$= \dots = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + \sqrt{2}t + 1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}t}{t^2 - 1} + C, \quad \text{где } t = \sqrt{\operatorname{tg} x}.$$

555. Имеем

$$\begin{aligned} \int \cos^2(ax) \cdot \cos^2(bx) dx &= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2ax)(1 + \cos 2bx) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 + \cos 2ax + \cos 2bx + \frac{1}{2}(\cos 2x(a-b) + \cos 2x(a+b)) \right) dx = \\ &= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2ax}{8a} + \frac{\sin 2bx}{8b} + \frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)} + C. \end{aligned}$$

556. Метод решения рассмотрен в тексте пособия.

557. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a) \cdot \cos(x+b)} = \frac{1}{\cos(a-b)} \int \frac{\cos((x+a) - (x+b))}{\sin(x+a) \cdot \cos(x+b)} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos(a-b)} \left(\int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} dx + \int \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)} dx \right) = \dots \\
&= \frac{1}{\cos(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)} \right| + C, \quad \cos(a-b) \neq 0.
\end{aligned}$$

558. Преобразуем интеграл при условии $\sin(x-1) \cos x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sin(x-1) \cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x-1) \sin(\frac{\pi}{2} - x)} = \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - 1)} \int \frac{\sin((x-1) + (\frac{\pi}{2} - x))}{\sin(x-1) \sin(\frac{\pi}{2} - x)} dx = \\
&= \frac{1}{\cos 1} \int \frac{\sin(x-1) \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(x-1) \sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(x-1) \sin(\frac{\pi}{2} - x)} dx = \\
&= \frac{1}{\cos 1} \int \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} + \frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)} \right) dx = \frac{1}{\cos 1} \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)} \right) dx = \\
&= \frac{1}{\cos 1} \left(\int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} + \int \frac{d(\sin(x-1))}{\sin(x-1)} \right) = \\
&= \frac{1}{\cos 1} (-\ln |\cos x| + \ln |\sin(x-1)|) + C = \frac{1}{\cos 1} \ln \left| \frac{\sin(x-1)}{\cos x} \right| + C.
\end{aligned}$$

559. Проинтегрируем по частям, положив $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$,
 $dv = \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$, $v = \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2 \sin^2 x} + C$:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

560. Эффекта понижения степени удаётся добиться путём интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
I_n &= - \int \sin^{n-1} x d \cos x = - \cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \\
&= - \cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,
\end{aligned}$$

откуда $I_n = \frac{1}{n} ((n-1) I_{n-2} - \cos x \sin^{n-1} x)$, $n = 3, 4, \dots$

561. Имеем

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 - \cos 2x) dx = \\
&= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \\
&= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.
\end{aligned}$$

562. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = - \int \frac{\cos 2x dx}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(\sin 2x)}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} = \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{du}{1 - \frac{1}{2} u^2} = \int \frac{du}{u^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u - \sqrt{2}}{u + \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \sin 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x} + C.
\end{aligned}$$

563. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^4 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{1 + \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2} dx = \quad (\text{положим } t = \cos 2x) \\
&= - \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 5} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1 - t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sin^2 x) + C.
\end{aligned}$$

564. Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и его производной:

$$\sin x - \cos x \equiv A(\sin x + 2 \cos x) + B(\cos x - 2 \sin x).$$

Приравнивая, соответственно, коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой частях тождества, получаем

$$\begin{cases} 1 = A - 2B, \\ -1 = 2A + B, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{5}, \\ B = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, приходим к интегралу

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx = \int \frac{-\frac{1}{5}(\sin x + 2 \cos x) - \frac{3}{5}(\cos x - 2 \sin x)}{\sin x + 2 \cos x} dx = \\
&= -\frac{x}{5} - \frac{3}{5} \ln |\sin x + 2 \cos x| + C.
\end{aligned}$$

565. Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и его производной:

$$\sin x \equiv A(\sin x - 3 \cos x) + B(\cos x + 3 \sin x),$$

откуда, приравнявая коэффициенты, соответственно, при $\sin x$ и $\cos x$, получаем систему для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} 1 = A + 3B, \\ 0 = -3A + B, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{10}, \\ B = \frac{3}{10}. \end{cases}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\sin x - 3 \cos x} dx &= \int \frac{\frac{1}{10}(\sin x - 3 \cos x) + \frac{3}{10}(\cos x + 3 \sin x)}{\sin x - 3 \cos x} dx = \\ &= \frac{1}{10}x + \frac{3}{10} \int \frac{d(\sin x - 3 \cos x)}{\sin x - 3 \cos x} = \frac{1}{10}x + \frac{3}{10} \ln |\sin x - 3 \cos x| + C. \end{aligned}$$

566. Представим числитель $2 \sin x + \cos x - 1$ в виде линейной комбинации знаменателя $\sin x - \cos x + 2$, его производной и константы:

$$2 \sin x + \cos x - 1 \equiv A(\sin x - \cos x + 2) + B(\cos x + \sin x) + D.$$

Методом неопределённых коэффициентов, приравнявая коэффициенты, соответственно, при $\sin x$ и $\cos x$, находим константы A, B, D из системы

$$\begin{cases} 2 = A + B, \\ 1 = -A + B, \\ -1 = 2A + D, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2}, \\ B = \frac{3}{2}, \\ D = -2. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(\sin x - \cos x + 2) + \frac{3}{2}(\cos x + \sin x) - 2}{\sin x - \cos x + 2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{3}{2} \int \frac{(\cos x + \sin x) dx}{\sin x - \cos x + 2} - 2 \int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2} = \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \ln(\sin x - \cos x + 2) - 4 \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 1} = \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \ln(\sin x - \cos x + 2) - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

567. Представим числитель в виде:

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x \equiv (A \sin x + B \cos x)(\sin x - 2 \cos x) + D(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Для нахождения коэффициентов A, B и D составим систему

$$\begin{cases} 2 = A + B, \\ 3 = -2A + B, \\ 5 = -2B + D, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{9}{5}, \\ B = -\frac{3}{5}, \\ D = \frac{19}{5}. \end{cases}$$

Подставив в интеграл, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}{\sin x - 2 \cos x} dx &= \frac{9}{5} \cos x - \frac{3}{5} \sin x + \frac{19}{5} \int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x} = \\ &= \frac{9}{5} \cos x - \frac{3}{5} \sin x + \frac{19}{5} \int \frac{2d(\operatorname{tg} \frac{x}{2})}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} = \\ &= \frac{9}{5} \cos x - \frac{3}{5} \sin x + \frac{19}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

568. Воспользуемся формулами понижения степени:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \cos^2 x} &= \int \frac{dx}{4 \cdot \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 - 5 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2} = \int \frac{2dx}{-1 - 9 \cos 2x} = \\ (z = \operatorname{tg} x, \text{ тогда } x = \operatorname{arctg} z, dx = \frac{dz}{1+z^2}, \cos 2x = \frac{1-z^2}{1+z^2}) \quad &= \int \frac{dz}{4z^2 - 5} = \\ = \frac{1}{2} \int \frac{d(2z)}{(2z)^2 - (\sqrt{5})^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2z - \sqrt{5}}{2z + \sqrt{5}} \right| + C = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x - \sqrt{5}}{2 \operatorname{tg} x + \sqrt{5}} \right| + C. \end{aligned}$$

569. Применяя формулы понижения степени $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, преобразуем $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}(1 + 3 \cos^2 2x)$. Полагая затем $t = \operatorname{tg} 2x$, находим

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2} + C.$$

570. Используя тождество $ab = \frac{1}{2}((a+b)^2 - (a^2 + b^2))$, находим

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx &= \frac{1}{2} \int (\sin x + \cos x) dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \\ &= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

571. Разобьём интеграл на два интеграла:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sqrt{1 + (\sin x + \cos x)^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}) + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

572. Имеем при $x \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^5 x}{1 - \cos x} dx &= \int \frac{\sin^5 x \cdot (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} dx = \int \frac{\sin^5 x \cdot (1 + \cos x)}{\sin^2 x} dx = \\ &= \int \sin^3 x (1 + \cos x) dx = \int \sin^3 x dx + \int \sin^3 x d(\sin x) = \\ &= \frac{1}{4} \int (3 \sin x - \sin 3x) dx + \frac{\sin^4 x}{4} = -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{\sin^4 x}{4} + C.\end{aligned}$$

573. Сделаем рекомендуемую подстановку, тогда $t^2 = 1 + 4 \sin x$, $\cos x dx = \frac{1}{2} t dt$ и получаем

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + 4 \sin x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t}{t^2} dt = \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \sin x} + C.$$

574. Сделав подстановку $t = \sqrt{1 + \cos x}$, получим

$$\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}} = 2 \int \frac{dt}{t^2(t^2 - 2)} = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct + D}{t^2 - 2} \right) dt,$$

где методом неопределённых коэффициентов находим $A = C = 0$, $B = -1$, $D = 1$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}} &= \frac{1}{t} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{2}} \right| + C \quad (x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

575. Положим $t = \cos^2 x$, тогда $-2 \cos x \sin x dx = dt$, т. е. $\sin 2x dx = -dt$. Переходя к новой переменной, получаем

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3 - \cos^4 x}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{3 - t^2}} = - \arcsin \frac{t}{\sqrt{3}} + C = - \arcsin \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C.$$

576. При условии $\cos 2x \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{-4 \sin x \cos x dx}{\sqrt{(2 \sin^2 x - 1)^2}} &= \int \frac{-2 \sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 2x}} = \int \frac{d(\cos 2x)}{|\cos 2x|} = \\ &= \operatorname{sgn}(\cos 2x) \int \frac{d(\cos 2x)}{\cos 2x} = \operatorname{sgn}(\cos 2x) \cdot \ln |\cos 2x| + C. \end{aligned}$$

577. Так как $\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$, то

$$\int \operatorname{sh}^2 x dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 2x - 1) dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{ch} 2x d(2x) - \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x - \frac{x}{2} + C.$$

578. Имеем $\int \operatorname{sh}^2 x d(\operatorname{ch} x) = \int (\operatorname{ch}^2 x - 1) d(\operatorname{ch} x) = \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x + C.$

579. Имеем при $x \neq 0$

$$\int \operatorname{cth}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \int \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + x + C.$$

580. Имеем

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2} \operatorname{ch} x)}{\sqrt{(\sqrt{2} \operatorname{ch} x)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\sqrt{2} \operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch} 2x} \right) + C.$$

581. Имеем

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = \int (\operatorname{th} x)^{-\frac{2}{3}} d(\operatorname{th} x) = 3\sqrt[3]{\operatorname{th} x} + C \quad (x \neq 0).$$

582. Используя формулу преобразования произведения гиперболических косинусов $\operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\alpha - \beta) + \operatorname{ch}(\alpha + \beta))$, получаем

$$\int (\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x) dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 2x + \operatorname{ch} 4x) dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8} \operatorname{sh} 4x + C.$$

583. Последовательно применяя формулы преобразования произведения гиперболических функций в суммы, получаем

$$\begin{aligned} \int (\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x) dx &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sh} 2x (\operatorname{ch} 4x - \operatorname{ch} 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (\operatorname{sh} 6x - \operatorname{sh} 2x - \operatorname{sh} 4x) dx = \frac{1}{24} \operatorname{ch} 6x - \frac{1}{16} \operatorname{ch} 4x - \frac{1}{8} \operatorname{ch} 2x + C. \end{aligned}$$

584. Пользуясь основным гиперболическим тождеством, представим единицу в числителе как гиперболическую:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x} &= \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} - \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \\ &= -\operatorname{cth} x - \operatorname{th} x + C \quad (x \neq 0).\end{aligned}$$

585. Положим $t = \sqrt{\operatorname{th} x}$, тогда $x = \operatorname{Arth}(t^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t^2}{1-t^2}$, где $|t| < 1$,
 $dx = \frac{2tdt}{1-t^4}$. Переходя к новой переменной интегрирования, при $x \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx &= 2 \int \frac{t^2 dt}{1-t^4} = \int \frac{(t^2-1) + (t^2+1)}{(1-t^2)(1+t^2)} dt = \int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{\operatorname{th} x}}{1-\sqrt{\operatorname{th} x}} \right| - \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{th} x} + C.\end{aligned}$$

586. $\int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx = \int \frac{d(x + \cos x)}{x + \cos x} = \ln |x + \cos x| + C.$

587. Умножим одновременно числитель и знаменатель дроби на e^x , а затем внесём e^x под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(e^x) + C.$$

588. Вынесем e^x из-под знака радикала и затем внесём e^{-x} под знак дифференциала:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} &= \int \frac{dx}{e^x \sqrt{e^{-2x}+1}} = \int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = - \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2+1}} = \\ &= -\ln \left(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1} \right) + C.\end{aligned}$$

589. Положим $t = e^x$, тогда

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx &= \int \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} - \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \\ &= \ln(t + \sqrt{t^2-1}) + \arcsin \frac{1}{t} + C = \ln \left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1} \right) + \arcsin(e^{-x}) + C \quad (x \geq 0).\end{aligned}$$

590. Положим $t = -\sqrt[3]{x+1}$, тогда $t^3 = -x-1$, $dx = -3t^2 dt$ и получаем

$$\int e^{-\sqrt[3]{x+1}} dx = -3 \int t^2 e^t dt = -3 \left(t^2 e^t - 2 \int t e^t dt \right) =$$

$$= -3(t^2 e^t - 2te^t + 2e^t) + C = -3t^2 e^t + 6te^t - 6e^t + C, \quad t = -\sqrt[3]{x+1}.$$

591. Положим $t = e^{\frac{x}{6}}$, тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} &= 6 \int \frac{dt}{t(1+t+t^2+t^3)} = 6 \int \frac{dt}{t(1+t)(1+t^2)} = \\ &= \int \frac{A dt}{t} + \int \frac{B dt}{t+1} + \int \frac{Ct+D}{1+t^2} dt = \\ &= \frac{Ax}{6} + B \ln \left(1 + e^{\frac{x}{6}}\right) + \frac{C}{2} \ln \left(1 + e^{\frac{x}{3}}\right) + D \operatorname{arctg} \left(e^{\frac{x}{6}}\right) + C. \end{aligned}$$

Методом неопределённых коэффициентов находим $A = 6$, $B = C = D = -3$. Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} = x - 3 \ln \left(\left(1 + e^{\frac{x}{6}}\right) \sqrt{1 + e^{\frac{x}{3}}} \right) - 3 \operatorname{arctg} \left(e^{\frac{x}{6}}\right) + C.$$

592. Положим $t = e^x$, тогда приходим к интегралу

$$\int \frac{3e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x - 3} dx = \int \frac{3t^2 + t + 1}{t(t^2 - 2t - 3)} dt = \int \frac{3t^2 + t + 1}{t(t+1)(t-3)} dt.$$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{3t^2 + t + 1}{t(t+1)(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-3}.$$

Приводя дроби в правой части к общему знаменателю и приравнивая тождественно многочлены в числителях, получим

$$3t^2 + t + 1 \equiv A(t+1)(t-3) + Bt(t-3) + Ct(t+1).$$

Если подставить $t = 0$, то находим $A = -\frac{1}{3}$; если же подставить $t = -1$, то получим $D = \frac{1}{2}$. Наконец, если положить $t = 3$, то найдём $C = \frac{31}{12}$. Подставляя найденное расложение под знак интеграла, получим при $x \neq \ln 3$:

$$\begin{aligned} \int \frac{3t^2 + t + 1}{t(t+1)(t-3)} dt &= -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{31}{12} \int \frac{dt}{t-3} = \\ &= -\frac{1}{3} \ln t + \frac{1}{2} \ln(t+1) + \frac{31}{12} \ln |t-3| + C = \\ &= -\frac{x}{3} + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + \frac{31}{12} \ln |e^x - 3| + C. \end{aligned}$$

593. $\int x^x (1 + \ln x) dx = x^x + C, \quad x > 0.$

594. Положим в формуле интегрирования по частям $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$, тогда $v = -\frac{1}{x}$ и получим

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

595. Положим в формуле интегрирования по частям $u = \ln^2 x$, $dv = x dx$, тогда $du = 2 \ln x \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$ и получим

$$I = \int x \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int x \ln x dx.$$

Положим $u = \ln x$, $dv = x dx$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$ и, интегрируя по частям ещё раз, при $x > 0$ получаем

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} \right) = \\ &= \frac{x^2}{2} (\ln^2 x - \ln x) + \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

596. Положим $u = \ln(x^2 - 1)$, $dv = x dx$, тогда $du = \frac{2x dx}{x^2 - 1}$, $v = \frac{x^2}{2}$ и проинтегрируем по частям:

$$I = \int x \ln(x^2 - 1) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 - 1) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2x dx}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 - 1) - \int \frac{x^3 dx}{x^2 - 1}.$$

Вычисляем оставшийся интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{x^2 - 1} &= \int \frac{(x^2 - 1 + 1)x dx}{x^2 - 1} = \int x dx + \int \frac{x dx}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + C. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$I = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln(x^2 - 1) - \frac{x^2}{2} + C.$$

597. Положим $u = x^2 + x$, $dv = e^{-x} dx$, тогда $du = (2x + 1) dx$, $v = -e^{-x}$ и получаем

$$\int (x^2 + x) e^{-x} dx = -e^{-x} (x^2 + x) + \int (2x + 1) e^{-x} dx =$$

(ещё раз проинтегрируем по частям, взяв $u = 2x + 1$, $dv = e^{-x}dx$)

$$= -e^{-x}(x^2 + x) - e^{-x}(2x + 1) + 2 \int e^{-x}dx = -e^{-x}(x^2 + 3x + 3) + C.$$

598. Полагая $u = x^3$, $dv = e^{3x}dx$ проинтегрируем по частям:

$$I = \int x^3 e^{3x} dx = \frac{x^3}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} (3x^2) dx = \frac{x^3}{3} e^{3x} - \int x^2 e^{3x} dx.$$

Полагая теперь $u = x^2$, $dv = e^{3x}dx$ второй раз проинтегрируем по частям:

$$I = \frac{x^3}{3} e^{3x} - \left(\frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} (2x) dx \right) = (x^3 - x^2) \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx.$$

Наконец, полагая $u = x$, $dv = e^{3x}dx$ последний раз проинтегрируем по частям:

$$I = (x^3 - x^2) \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) = \left(x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9} \right) \frac{e^{3x}}{3} + C.$$

599. Здесь решение можно "увидеть": $\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx = \frac{x}{\ln x} + C.$

600. Принимая во внимание, что $\frac{dx}{x \ln x} = d(\ln(\ln x))$, имеем при $x > 1$:

$$\int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln(\ln x))}{\ln(\ln x)} = \ln |\ln(\ln x)| + C.$$

601. Проинтегрируем три раза по частям:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx &= \int \frac{1}{x^3} \cdot \ln^3 x dx = -\frac{1}{2x^2} \cdot \ln^3 x + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^3} \cdot \ln^2 x dx = \\ &= -\frac{1}{2x^2} \cdot \ln^3 x + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2x^2} \cdot \ln^2 x + \int \frac{1}{x^3} \cdot \ln x dx \right) = \\ &= -\frac{1}{2x^2} \cdot \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \cdot \ln^2 x + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} \right) = \\ &= -\frac{3}{4x^2} \left(\frac{2}{3} \ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + \frac{1}{2} \right) + C \quad (x > 0). \end{aligned}$$

602. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \int \frac{x dx}{2\sqrt{x}(x+1)} = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} -$$

$$\begin{aligned}
- \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} \right) dx &= x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \int \frac{d(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2 + 1} = \\
&= x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C \quad (x > 0).
\end{aligned}$$

603. Интегрируя по частям, при $x > 1$ получаем

$$\begin{aligned}
\int \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx &= x \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^3} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \\
&= x \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = x \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \sqrt{x-1} + C.
\end{aligned}$$

В этой задаче можно было вначале положить $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

604. Полагая $t = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, имеем $x = \operatorname{tg}^2 t$, $dx = 2 \operatorname{tg} t \cdot \frac{dt}{\cos^2 t}$, и тогда

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{x+1} &= \int \frac{t}{\operatorname{tg} t} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} t dt}{\cos^2 t (\operatorname{tg}^2 t + 1)} = 2 \int t dt = \\
&= t^2 + C = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x} + C \quad (x > 0).
\end{aligned}$$

605. Интегрируя по частям, положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = \frac{dx}{x^3}$. Тогда $du = \frac{dx}{x^2 + 1}$, $v = -\frac{1}{2x^2}$ и имеем при $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} dx &= \int \operatorname{arctg} x d \left(-\frac{1}{2x^2} \right) = \operatorname{arctg} x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2} \right) - \int \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \cdot \frac{dx}{x^2 + 1} = \\
&= -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)} = -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(x^2 + 1)} dx = \\
&= -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x \right) + C = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) - \frac{1}{2x} + C.
\end{aligned}$$

606. Положим $t = \arcsin x$, разобьём интеграл на сумму двух интегралов и затем один из них проинтегрируем по частям ($0 < |x| < 1$):

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{t}{\sin^2 t} \cdot \frac{1+\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \\
&= \int \frac{t}{\sin^2 t} (1 + \sin^2 t) dt = \frac{t^2}{2} + \int \frac{t dt}{\sin^2 t} = \frac{t^2}{2} - \int t d(\operatorname{ctg} t) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t^2}{2} - t \cdot \operatorname{ctg} t + \ln |\sin t| + C = \frac{(\arcsin x)^2}{2} - \arcsin x \cdot \frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)} + \\
&+ \ln |\sin(\arcsin x)| + C = \frac{(\arcsin x)^2}{2} - \arcsin x \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \ln |x| + C.
\end{aligned}$$

607. Положим $t = e^x$, тогда

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arcsin(e^x)}{e^x} dx &= \int \frac{\arcsin t}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \arcsin t + \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = \\
&= -\frac{1}{t} \arcsin t - \ln \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t} + C = \\
&= -\frac{1}{e^x} \arcsin(e^x) - \ln \left(1 + \sqrt{1-e^{2x}} \right) + x + C \quad (x < 0).
\end{aligned}$$

608. Положим $u = \arccos x$, $x^2 dx = dv$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int (x^2 \cdot \arccos x) dx = \int \arccos x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Образовавшийся в правой части интеграл ещё раз проинтегрируем по частям, положив на этот раз $u = x^2$, $dv = \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| \leq 1$):

$$\begin{aligned}
&\frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{1}{3} \int x^2 d(\sqrt{1-x^2}) = \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{x^2}{3} \sqrt{1-x^2} + \\
&+ \frac{1}{3} \int \sqrt{1-x^2} d(x^2) = \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{x^2}{3} \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9} \sqrt{(1-x^2)^3} + C.
\end{aligned}$$

609. Применяя подстановку $u = 1 - x$, разбивая на 2 интеграла и интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned}
&\int x \cdot \arcsin(1-x) dx = \int (1-x) \cdot \arcsin(1-x) d(1-x) - \\
&- \int \arcsin(1-x) d(1-x) = \int u \cdot \arcsin u du - \int \arcsin u du = \\
&= \frac{u^2}{2} \arcsin u - \frac{1}{2} \int \frac{u^2 du}{\sqrt{1-u^2}} - u \cdot \arcsin u + \int \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}} = \\
&= \frac{u^2}{2} \arcsin u - \frac{1}{2} \int \frac{u^2 du}{\sqrt{1-u^2}} - u \cdot \arcsin u - \sqrt{1-u^2}.
\end{aligned}$$

Интеграл $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{1-u^2}}$ вычислим подстановкой $u = \sin t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} \int \frac{u^2 du}{\sqrt{1-u^2}} &= \int \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t + C_1 = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin u - \frac{u}{2} \sqrt{1-u^2} + C_1. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int x \cdot \arcsin(1-x) dx &= \frac{u^2}{2} \arcsin u - u \cdot \arcsin u - \sqrt{1-u^2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \arcsin u - \frac{u}{2} \sqrt{1-u^2} \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin u \cdot \left(u^2 - 2u - \frac{1}{2} \right) - \sqrt{1-u^2} \left(1 - \frac{u}{4} \right) + C = \\ &= \frac{2x^2 - 3}{4} \arcsin(1-x) - \sqrt{2x-x^2} \cdot \frac{x+3}{4} + C \quad (x \in (0, 2)). \end{aligned}$$

610. Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \int (\arcsin x)^2 dx &= x(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x dx = \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2 \int \arcsin x d(\sqrt{1-x^2}) = \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + C \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

611. Разобьём интеграл на два интеграла и проинтегрируем первый из них по частям:

$$\begin{aligned} \int (2x^2 - 1) \cos 2x dx &= 2 \int x^2 \cos 2x dx - \int \cos 2x dx = \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x \cdot x^2 - \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot 2x dx \right) - \frac{1}{2} \sin 2x = \\ &= \sin 2x \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) - \left(-x \cdot \cos 2x + \int \cos 2x dx \right) = \\ &= \sin 2x \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) + x \cdot \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + C = \sin 2x (x^2 - 1) + x \cdot \cos 2x + C. \end{aligned}$$

612. Интегрируя по частям каждый из интегралов, имеем:

$$I_1 = \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - I_2,$$

$$I_2 = \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + I_1.$$

Отсюда находим

$$I_1 = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C,$$

$$I_2 = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C \quad (x > 0).$$

Можно было бы найти эти интегралы, интегрируя последовательно каждый из них два раза по частям.

613. Положим $u = \ln(nx)$, $dv = x^{n+1}dx$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^{n+2}}{n+2}$ и проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int x^{n+1} \ln(nx) dx &= \frac{x^{n+2}}{n+2} \cdot \ln(nx) - \int \frac{x^{n+2}}{n+2} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{x^{n+2}}{n+2} \cdot \ln(nx) - \frac{1}{n+2} \int x^{n+1} dx = \frac{x^{n+2}}{n+2} \left(\ln(nx) - \frac{1}{n+2} \right) + C, \quad x > 0. \end{aligned}$$

614. Проинтегрируем по частям, полагая $dv = dx$, $u = \ln^2(x + \sqrt{1+x^2})$:

$$\begin{aligned} \int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx &= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2 \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d(2\sqrt{1+x^2}) = \\ &= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x + C. \end{aligned}$$

615. Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d(\sqrt{1+x^2}) = \\ &= \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int dx = \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x + C. \end{aligned}$$

616. Преобразовав подынтегральное выражение, проинтегрируем по частям ($x \neq \pm 1$):

$$\int \frac{x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d\left(\frac{1}{1-x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2(1-x^2)} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Вычислим последний интеграл подстановкой $t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{dt}{1-2t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}t}{1-\sqrt{2}t} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

617. Проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int x(1+x^2) \operatorname{arctg} x \, dx &= \frac{1}{4} \int \operatorname{arctg} x \cdot d((1+x^2)^2) = \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \\ &- \frac{1}{4} \int (1+x^2) dx = \frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

618. Интегрируем по частям:

$$I = \int x^7 \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^8}{8} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{8} \int \frac{x^8 dx}{1+x^2}.$$

Выделим целую часть дроби:

$$\begin{aligned} x^8 &= (x^8 + x^6) + (-x^6 - x^4) + (x^4 + x^2) + (-x^2 - 1) + 1 = \\ &= (x^2 + 1)(x^6 - x^4 + x^2 - 1) + 1, \end{aligned}$$

т. е. $\frac{x^8}{x^2+1} = x^6 - x^4 + x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$. Интегрируем

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^8}{8} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{8} \int \left(x^6 - x^4 + x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{8}(x^8 - 1) \operatorname{arctg} x - \frac{x^7}{56} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^3}{24} + \frac{x}{8} + C. \end{aligned}$$

619. Положим $u = \arcsin x$, $dv = \frac{x dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Тогда $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$v = \int \frac{x dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C_1. \text{ Возьмём } v = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I = \int \frac{x \arcsin x \, dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

На ОДЗ $|x| < 1$ и знак модуля можно раскрыть: $I = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} + C$.

620. Проинтегрируем по частям, положив $u = x$, $dv = \operatorname{tg}^4 x dx$. В данном случае вид функции $v(x)$ не очевиден, поэтому, чтобы найти её, вычислим отдельно интеграл

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^4 x dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^2 x dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C_1. \end{aligned}$$

Возьмём в качестве $v(x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x$ и продолжим интегрирование:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \operatorname{tg}^4 x dx &= x \left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x \right) - \int \left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x \right) dx = \\ &= x \left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x \right) - \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \operatorname{tg} x dx - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \frac{x^2}{2} = \\ &= x \left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x \right) - \frac{1}{3} \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \frac{4}{3} \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \frac{x^2}{2} = \\ &= x \left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x \right) - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{6} - \frac{4}{3} \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

12 Варианты заданий для самопроверки, подготовки к контрольным работам и зачёту

«Математика в современном своём состоянии настолько обширна и разнообразна, что можно смело сказать, что в полном объёме она уму человеческому непостижима».

А. Н. Крылов (1863–1945) – русский и советский математик, механик и кораблестроитель; академик Петербургской АН / РАН / АН СССР; профессор Морской академии; генерал флота, генерал для особых поручений при морском министре Российской империи. Основатель современной русской школы кораблестроения.

При подготовке к предстоящей контрольной работе выделите достаточное время для *повторения* решений основных типов задач, изучаемых в текущем семестре. Запомните приёмы и методы решений.

Выполните варианты заданий каждое в течение не более 1,5 часов, никуда не подсматривая, полностью самостоятельно. Поставьте себе оценки согласно критериям:

- + , если задача решена полностью верно (приведены необходимые обоснования, ход решения и ответ верные);
- $\pm$, если задача в целом решена верно, но в решении присутствует *очень небольшая* погрешность, не влияющая на общий алгоритм решения;
- +/- , если имеем промежуточный вариант между соседними случаями (задача, большей частью, решена, но есть довольно существенные погрешности в решении);
- $\mp$, если при решении допущены грубые ошибки (в том числе арифметические), влияющие на ход решения, но, тем не менее, есть небольшое продвижение в решении;
- , если допущено более одной грубой ошибки, много мелких ошибок, недостаточной обоснование, незнание определений и формулировок используемых теорем, видно непонимание подходов к решению данного типа задач.

Выставьте себе примерную оценку (помните, что более точно ваши знания может оценить только ваш преподаватель):

- 5–6 задач с оценками + и $\pm$ (оценка 5);
- 4 задачи с оценками + и $\pm$ (оценка 4);
- 3 задачи с оценками + и $\pm$ (оценка 3);
- всё остальное – неудовлетворительно (решено менее половины предложенных в варианте задач).

Проанализируйте свои ошибки, старайтесь в дальнейшем их не допускать.

P.S. Решения задач разобраны в пособии.

12.1 ВАРИАНТ № 1

1	2	3	4	5	6

1. Существует ли такая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f'(x) = \operatorname{sgn} x$ при всех $x \in \mathbb{R}$? Ответ обосновать.

2. Найдите $f^{(43)}(0)$, если $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$.

3. Приведите определения касательной прямой и нормали к графику функции. Найдите уравнения касательной и нормали в точке $A(0, 1)$ к кривой, заданной неявно уравнением

$$x^2y + e^{xy^2} - y = 0.$$

4. Найдите производные y'_x , y''_{x^2} , y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной параметрически, если

$$\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t, \\ y = e^t \cdot \sin t. \end{cases}$$

5. Что такое неопределённый интеграл? Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2}.$$

6. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{\sin x \, dx}{\sin x - 3 \cos x}.$$

12.2 ВАРИАНТ № 2

1	2	3	4	5	6

1. Сформулируйте правило Лопиталья и с его помощью вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^4(ax))}{\ln(\sin^4(bx))}, \quad \text{где } ab \neq 0.$$

2. Сформулируйте теорему Рóлля и проверьте, выполняется ли эта теорема для функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ на сегменте $[-1, 1]$.

3. Используя формулу Лейбница, найдите производную $y^{(10)}(x)$ и дифференциал $d^{10}y(x)$, если

$$y = (x^3 + 4x^2 + 2)e^{2x}.$$

4. Используя разложение по формуле Тейлора, найдите $f^{(23)}(0)$, если

$$f(x) = \sin(x^7) \cdot \cos(x^8).$$

5. Приведите определения первообразной и неопределённого интеграла. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

6. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$$

12.3 ВАРИАНТ № 3

1	2	3	4	5	6

1. Исследуйте возможность применения правила Лопиталья к пределу

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + \sin x \cdot \cos x}{(x + \sin x \cdot \cos x)e^{\sin x}}.$$

2. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq x_0, \\ ax + b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты a и b , чтобы $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x = x_0$?

3. Найдите дифференциалы dy и d^2y сложной функции, если

$$y = f(2^x).$$

4. Разложите по формуле Тейлора до 6-го порядка включительно в окрестности точки $x = 1$ с остаточным членом в форме Пеано функцию

$$f(x) = \sin(x^2 - 2x + 3).$$

5. Сформулируйте понятие первообразной и неопределённого интеграла. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{x(1 - x^3)^2}.$$

6. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

12.4 ВАРИАНТ № 4

1	2	3	4	5	6

1. Найдите dy , d^2y сложной функции $y = f(x)$, если $x = \sin t \cdot \ln t$ (t – независимая переменная).

2. Используя разложение функции по формуле Тейлора, найдите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right).$$

3. Проверьте справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$ на сегменте $[4, 5]$. Найдите точку, в которой касательная параллельна хорде AB , где $A(4, f(4))$, $B(5, f(5))$.

4. Найдите d^2y в произвольной точке (x, y) и в точке $M(-1, 1)$, если

$$y + \ln y + x^3 = 0.$$

5. Сформулируйте понятие дифференцируемой в точке функции. Исследуйте на дифференцируемость в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{если } x \neq 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

6. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int x \cdot \operatorname{tg}^4 x \, dx.$$

12.5 ВАРИАНТ № 5

1	2	3	4	5	6

1. Может ли функция Дирихле являться на сегменте $[0, 1]$ производной какой-либо функции? Ответ обосновать.

2. Записав формулу Коши для функций $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ и $g(x) = x^2 + 4$ на сегменте $[0, 2]$, найдите значение c . (Привести формулировку теоремы Коши).

3. Является ли функция

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \left(x^2 \cdot \cos \frac{1}{9x} \right) + 2x, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

дифференцируемой в точке $x = 0$?

4. Используя формулу Маклорена, выясните, при каких значениях a, b, c выполнено равенство

$$e^{2x-x^2} - \frac{1+ax}{\sqrt{1+bx^2}} = cx^3 + o(x^3).$$

2. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$$

6. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}}.$$

12.6 ВАРИАНТ № 6

1	2	3	4	5	6

1. Исследуйте на непрерывность и дифференцируемость в точке $x = 1$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \ln x \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \cos \frac{1}{x-1}, & \text{если } x \neq 1, \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

2. Найдите x' и x'' , а также dx , d^2x обратной функции, если $y = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Найдите дифференциалы du , d^2u сложной функции

$$u = f(v), \quad \text{если } v(x) = e^{2x} \sin 3x.$$

Как изменился бы результат, если бы v была независимой переменной?

4. Используя теорему Лагранжа, докажите неравенство

$$\ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{4}|x - y|, \quad \text{если } x, y \geq 1.$$

5. Разложите по формуле Маклорена до членов 6-го порядка включительно функцию

$$f(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right).$$

6. Вычислите неопределённые интегралы

$$\text{а) } \int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}.$$

12.7 ВАРИАНТ № 7

1	2	3	4	5	6

1. Используя следствие из теоремы Лагранжа о постоянстве функции с нулевой производной (сформулируйте), докажите тождество

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \equiv \pi \cdot \operatorname{sgn} x \quad \text{при } |x| \geq 1.$$

2. Используя формулу Лейбница, найдите $d^n y$, если $y = (x^2 - 7x)e^{-3x}$.

3. Выделите главный член вида $C(x-1)^n$ при $x \rightarrow 1$ у бесконечно малой функции

$$y = \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}.$$

4. Напишите уравнения касательной и нормали в точке, соответствующей $t = 1$, к параметрически заданной кривой:

$$\begin{cases} x = e^{-3t^2}, \\ y = 2t^2 + 3t. \end{cases}$$

5. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int x^2 \arccos x \, dx.$$

6. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6} \, dx.$$

12.8 ВАРИАНТ № 8

1	2	3	4	5	6

1. Покажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

непрерывна при $x = 0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производных.

2. Докажите, используя теорему Лагранжа, что при $x > 0$ справедливо неравенство

$$1 + 2 \ln x \leq x^2.$$

(Приведите формулировку этой теоремы).

3. Найдите значения параметров a и b такие, что при $x \rightarrow 0$ функция

$$f(x) = \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

была бесконечно малой как можно более высокого порядка малости.

4. Разложите функцию

$$f(x) = \frac{e^{3x^2}}{2 + x^2}$$

по формуле Маклорена до членов 4-го порядка включительно.

5. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \cos^2 x}.$$

6. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}.$$

12.9 ВАРИАНТ № 9

1	2	3	4	5	6

1. Выделите главный член вида Cx^n при $x \rightarrow 0$ функции

$$y = \sin x - \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \right).$$

2. При каком значении параметра a существует $f'(0)$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{при } x > 0? \end{cases}$$

3. Используя формулу Маклорена, вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+5} - e^x}{\ln(\cos x)}.$$

4. Найдите $y^{(n)}(x)$, если $y = \sin(ax) \cdot \sin(bx)$, где $ab \neq 0$.

5. Найдите первообразную для функции

$$f(x) = |\sin x|$$

на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

6. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2}.$$

12.10 ВАРИАНТ № 10

1	2	3	4	5	6

1. Исследуйте на дифференцируемость на интервале $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ функцию

$$f(x) = x \cdot \sqrt{(1-x)^2 \sin(x^2)}.$$

2. Используя разложения по формуле Маклорена, выясните, при каких значениях a, b, c выполнено равенство (при $x \rightarrow 0$)

$$e^{2x+x^2} - ax\sqrt[3]{1+bx} = 1 + cx^3 + o(x^3).$$

3. Верно ли, что если

$$f(x) = 2x - 1 + o(1) \quad \text{при } x \rightarrow 4 \quad \text{и} \quad f(4) = 7,$$

то $f(x)$ – дифференцируема в точке $x = 4$?

4. Определив вид неопределённости, раскройте её и вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

5. Не используя правила Лопиталя, вычислите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[7]{x^7 - x^6} \right).$$

6. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx.$$

Предметный указатель

- Ареасинус, 20
- Арифметические операции:
 - над дифференцируемыми функциями, 44
 - над производными, 12
- Векторное уравнение кривой, 68
- Гиперболические функции, 12
- Гладкие и кусочно гладкие функции, 39
- Дарбу, теорема, 45
- Гиперболические функции, 321
- Гиперболические подстановки, 271, 273, 274
- Дифференциал:
 - геометрический смысл, 35
 - неявно заданной функции, 71
 - определение, 33
- Дифференциалы высших порядков:
 - определение, 87
 - свойства, 88
 - заданных неявно функций, 92
- Дифференциальное исчисление, 10, 31
- Дифференцирование:
 - неявно заданной функции, 71
 - обратной функции, 73
 - параметрически заданных функций, 69
- Дифференцируемые функции:
 - арифметические операции, 44
- Дифференцируемость:
 - n -кратная, 84
 - на интервале, 33
 - на сегменте, 40
 - необходимое и достаточное условие, 40
 - необходимое условие, 38
 - односторонняя, 40
 - почленное дифференцирование
 - равенств, 45
 - сложная функция, 44
 - связь с непрерывностью, 38
 - в точке, 11, 33
- Замена переменной при дифференцировании, 18
- Интеграл Френеля, 195
- Интеграл Пуассона, 195
- Интегральный синус, 195
- Инвариантность 1-го дифференциала, 45
- Касательная и нормаль, 35, 69
- Кусочно гладкая функция, 39
- Лопиталя правила, 125
- Математический анализ, 10
- Метод неопределённых коэффициентов, 238
- Методы интегрирования:
 - биномиальные дифференциалы, 278
 - дробно-линейные иррациональности, 259
 - гиперболические подстановки, 271, 272
 - квадратичные иррациональности, 261
 - метод алгебраических преобразований, 235
 - метод неопределённых коэффициентов, 237
 - метод Остроградского, 240
 - нестандартные подстановки, 281
 - по частям, 204
 - подстановки Эйлера, 275
 - рациональных функций, 230
 - тригонометрические функции, 305
 - тригонометрические подстановки, 268, 272

- умножение на сопряжённое выражение, 280
 универсальная подстановка, 305
 замена переменной, 200
 Многочлен Тейлора, 144
 Неопределённый интеграл:
 определение, 192
 основные свойства, 196
 Непрерывная дифференцируемость, 33
 Обратная функция, 14
 Остаточные члены в формуле Тейлора, 145
 Первообразная, 190
 Показательно-степенная функция, 15
 Полукасательная, 42
 Предварительное логарифмирование, 15, 17
 Приближение функции дифференциалом, 37
 Приращение функции, 33
 Производная показательно-степенной функции, 15
 Производная произведения n функций, 16
 Производная:
 n -го порядка, 84
 физический смысл, 35
 геометрический смысл, 35
 неявной функции, 71
 обратной функции, 14, 73
 односторонняя, 40
 определение, 10, 31
 параметрически заданной функции, 69
 периодической функции, 45
 сложной функции, 13, 44
 таблица производных, 11
 теорема Дарбу о промежуточных значениях, 45
 точки разрыва, их характер, 45
 Производные высших порядков:
 неявно заданных функций, 90
 параметрически заданных функций, 90
 таблица, 86
 явных функций, 85
 Ряд Тейлора, 146
 Сигнум, 13
 Специальные функции, 195
 Таблица интегралов, 196
 Таблица производных, 11
 Теорема:
 Дарбу, 45
 Ферма, 106
 Коши, 110
 Лагранжа, 108
 Ролля, 107
 Тригонометрические подстановки, 268, 270–272
 Формула Лейбница, 89
 Формула Тейлора:
 локальная, 145
 на промежутке, 152
 остаточный член в форме Коши, 146
 остаточный член в форме Лагранжа, 146
 остаточный член в форме Пеано, 146
 остаточный член в форме Шлёмилха–Роша, 146
 Формулы для гиперболических функций, 321
 Функция:
 чётность и нечётность, 46
 неявное задание, 70
 параметрическое задание, 67
 периодическая, 45
 Вейерштрасса, 38
 Функции элементарные, 10

Список литературы

- [1] *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. Учеб. для вузов / Под ред. В.А. Садовничего. – 5-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004. – 640 с. – (Классический университетский учебник)
- [2] *Беркович Ф.Д., Федий В.С., Шлыков В.И.* Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями. Учеб. пособие. – Ростов н/Д: Феникс, 2008.
- [3] *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Издательство Лань, 2016. – 492 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
- [4] *Бутузов В.Ф.* Лекции по математическому анализу. Часть I. Учеб. пособие. – М.: Физический факультет МГУ, 2012.
- [5] *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Математический анализ в задачах и упражнениях. В 3-х т. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. – Новое изд. – М.: Изд-во Московского университета; МЦНМО, 2017. – 412 с.
- [6] *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: Учеб. пособие для вузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1997. – 304 с.: ил.
- [7] *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Учеб. пособие. – СПб., Издательство Лань, 2017. – 624 с.
- [8] *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть I. – Изд. 10-е, испр. – М.: МЦНМО, 2019. – 564 с.: ил.
- [9] *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. В 2 ч. Часть 1 / Учебник для академического бакалавриата. – 4-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2013. – 660 с. – (Бакалавр. Углублённый курс).
- [10] *Краснова С.А., Уткин В.А.* Основы математического анализа. Учебное пособие. – М.: РГГУ, 2010. – 551с.
- [11] *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. В 3 томах. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. – М.: Дрофа, 2003. – 704 с.

-
- [12] Математика. Большой энциклопедический словарь /Под ред. акад. Ю.В. Прохорова. – 3-е изд. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2000. – 848 с.: ил.
- [13] Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие / Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Под ред. Бутузова В.Ф. – 4-е изд., испр. – М.: Физ.-мат. лит-ра, 2001. – 480 с.
- [14] *Никитин А. А.* Математический анализ. Сборник задач: учеб. пособие для академического бакалавриата. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 353 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс).
- [15] *Никитин А.А., Фомичев В.В.* Математический анализ. Углублённый курс. Учебник и практикум. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 462с.
- [16] *Пантаев М. Ю.* Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа. Том 1. – М.: ЛИБРОКОМ, 2012. – 368 с.
- [17] *Садовничая И. В., Фоменко Т. Н., Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Дифференцирование функций одной переменной: Учеб. пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 156 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс).
- [18] *Садовничий В.А., Подколзин А.С.* Задачи студенческих олимпиад по математике. – М.: Наука, 1978.
- [19] *Сизый С.В.* Математические задачи. Студенческие олимпиады математико-механического факультета Уральского госуниверситета. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 128с.
- [20] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов. В 3 т. Том 1. – 15-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2021. – 608 с.: ил.
- [21] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов. В 3 т. Том 1. – 16-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2022. – 608 с.: ил.
- [22] *Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Неопределённый интеграл / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2019. – 187 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс)

- [23] *Шибинский В.М.* Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа. – М.: Высш. шк., 2007. – 543 с.
- [24] Интернет-источник: <https://scask.ru/>

Рекомендуемые книги автора по другим разделам математического анализа:

- [25] *Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Тожественные равенства и неравенства и их применение: В помощь практическим занятиям: Учеб. пособие для студентов университетов. – М.: МАКС Пресс, 2016. – 272 с.
- [26] *Садовничая И. В., Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Определённый интеграл. В 2 ч. Часть 1 / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 242 с. – (Бакалавр. Академический курс)
- [27] *Садовничая И.В., Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Определённый интеграл. В 2 ч. Часть 2 / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 199 с. – (Бакалавр. Академический курс)
- [28] *Садовничая И.В., Фоменко Т.Н., Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Вещественные числа и последовательности: Учеб. пособие для академического бакалавриата / Под общей ред. В. А. Ильина. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 109 с. – (Бакалавр. Академический курс).

Книга содержит 197 примеров, 620 задач для самостоятельной работы (с решениями) и 52 цитат и высказываний известных авторов.

Учебное издание

ХОРОШИЛОВА Елена Владимировна

КУРС СЕМИНАРОВ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Самоучитель

Книга 2

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ:
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ,
НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие

для очной, дистанционной и смешанной форм обучения
студентов университетов

По всем вопросам обращаться на почту:

khorelenay@yandex.ru